

yoshi-naga.jp

E-mail: 01@a.nifty.jp

吉永弘志の発案と研究 (2021.07).

記載の経緯(PDF): [2021.07](#), [2019.07](#), [2018.11](#)



金色文字の作り方(Excel 等)

「挿入」→「ワードアート」→
「文字のオプション」→「塗り
つぶし」で金の*.jpg, *.bmp.

目次

1 工夫,製作(職務外)

簡単. 濃厚でまろやかなコーヒー・お茶[106], 音源探査
カメラ[105], etc.

2 研究成果(職務外)

100m を 20 秒で往復する時間の相対論効果[205], 「や
っとわかった！」エネルギーと情報量の関係[204], 逆音
源を音源位置に仮想するアレー信号処理に関する研
究[202], etc.

3 提案,アイデア(職務外)

4 初めて作成した web site (1996)

5 研究成果(職務.抜粋.)

道路交通騒音対策の参考資料[514], オーバーラップさ
せた遮音壁の近傍における騒音の計算方法[512], 換気
風向の最適化によるトンネル内歩道の環境改善[504],
兵庫県南部地震後における建設機械の活用状況[501],
etc.

1 工夫,製作(職務外)

107 簡単. 霧吹き＆ペーパータオルで掃除. (2021.07).

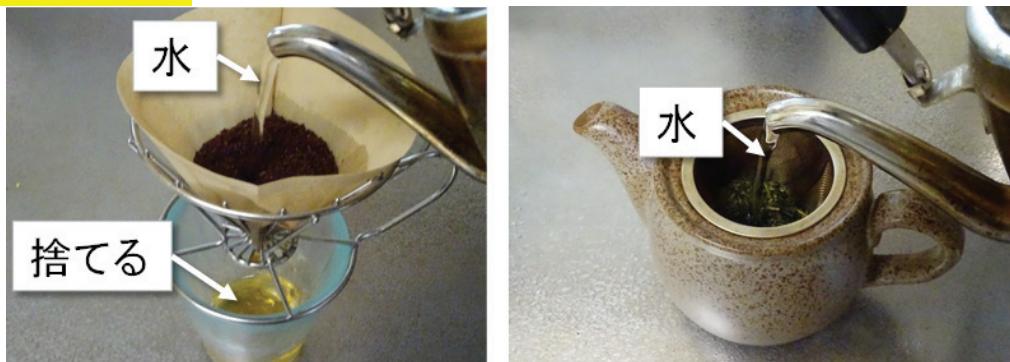


霧吹きをかけてペーパータオルで拭き取り. 埃が飛ばない. 早い.

[目次へ](#)

106 簡単. 濃厚でまろやかなコーヒー・お茶. (2018.03).

1) フィルタ・茶こしに入れたコーヒー・お茶に少量の水を注ぐ.

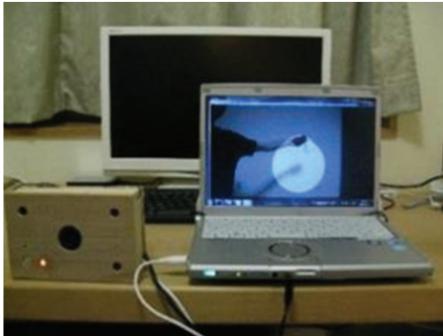


2) お湯を沸かす. 3) カップ・急須の薄いコーヒー・お茶を捨てる. 4) 熱湯を注ぐ. 温度調整不要.

[目次へ](#)

音源探査カメラ(2016.07).

後述する博士論文の副産物. 性能を落としてリアルタイムで動画表示できるようにした. [Tsukuba Mini Maker Faire 2020](#) (2020年2月)で公開した.



室内スピーカー([動画](#))



道路(セミの音が混入)([動画](#))



工事と道路(セミ、発電機の音が混入) ([動画](#))



サッカー(セミの音が混入) ([動画](#))

目次へ

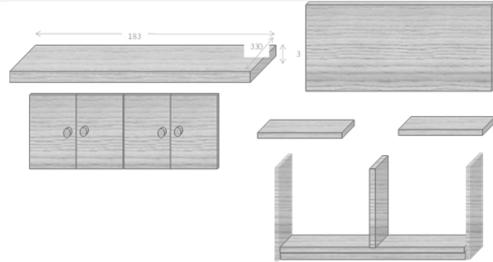
ごみ箱の透明化(2015).



電池, 空き缶等は鮮やかな色彩. ごみ箱を透明に！

102

棚(2011).



01 集成材を切断.



02 ダボで組み付け

(釘で仮止めし, ドリルで外から穴をあけ, ダボを打ち込み, 突起を切断).



03 スライド蝶番を設置.

101

鳥の飛来防止(2009.08).



(赤い線で位置を表示)

細くて見えにくいナイロン線等で鳥の飛来防止. 上下方向にも配線してベランダや庭でも効果を確認.

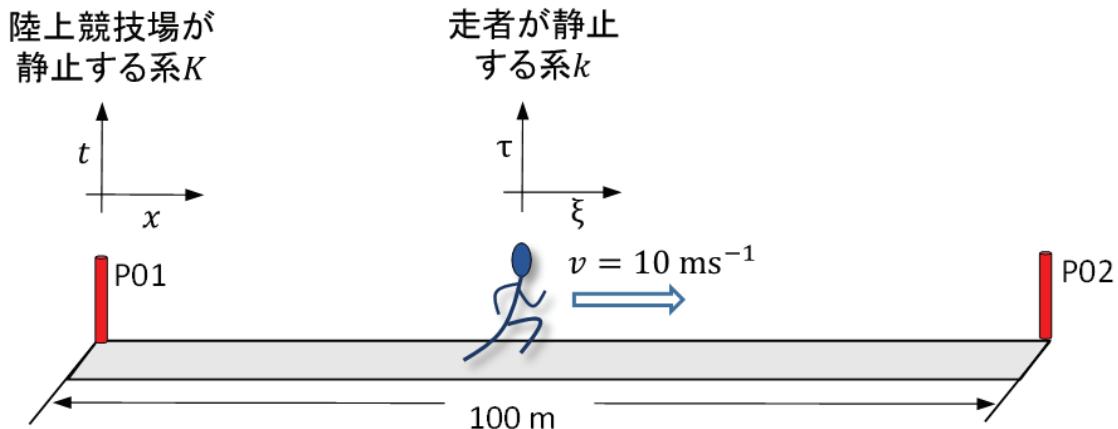
[目次へ](#)

2 研究成果(職務外)

205 100m を 20 秒で往復する時間の相対論効果 -相対性理論の簡素な解説- (2021.07) [全文 PDF](#)

アインシュタインの相対性理論を簡素に解説 (以下) .

- 100 mを等速 10 m/s で通過する時間は、陸上競技場の時計での10秒に対して、走者の時計で $5.56 \times 10^{-15} \text{ 秒}$ 短くなる。
- 100 mを停止, 3秒の加速 $\frac{100}{21} \text{ m/s}^2$, 4秒の等速 $\frac{100}{7} \text{ m/s}$, 3秒の減速 $-\frac{100}{21} \text{ m/s}^2$ の計10秒で走行する場合は、走者の時計で $6.80 \times 10^{-15} \text{ 秒}$ 短くなり、往復ではその2倍。



- 双子のパラドックでの誤解。
- スカイツリーの展望台での時計の進み
- GPS衛星での時計の進み

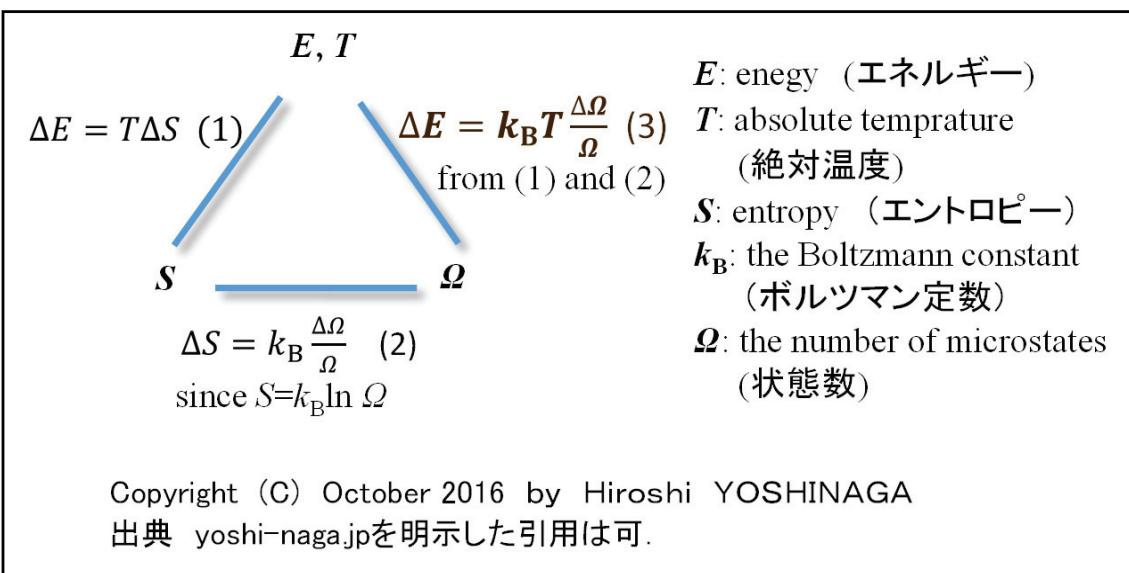
なお、双子のパラドックスの否定に関する[論文](#)を Nature Physics, および日本物理学会に投稿したが不採択となり、arXiv でも掲載許可を得られなかった (2018).

[目次へ](#)

「やっとわかった！」エネルギーと情報量の関係(2016.10).
発表はこのサイトのみ.

$$\Delta E = k_B T \Delta \Omega / \Omega$$

エンロトピーの定義式に基づいて、エネルギー変化 ΔE と状態数の変化率 $\Delta \Omega / \Omega$ には $\Delta E = k_B T \Delta \Omega / \Omega$ の関係があると解釈. ここで, k_B :ボルツマン定数, T :温度. エネルギーとエントロピーと情報量の関係は、解説本を読んでもわからなかつた. 自己流の解釈で「やっとわかつた！」.

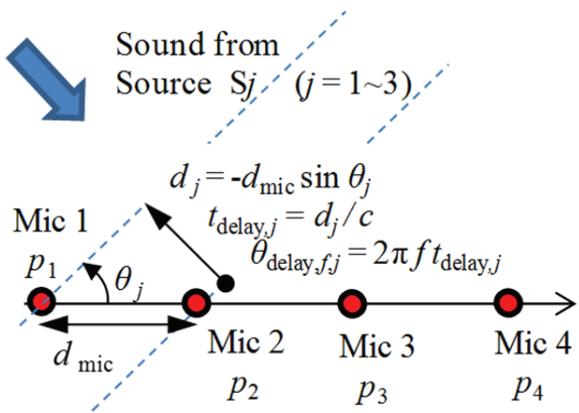


温度 T とは「エネルギー変化 ΔE 」と「状態数の変化率 $\Delta \Omega / \Omega$ の比」と解した.

[「気体」、「光」、および「運動する粒子」への適用.\(2019PDF\)](#)

[目次へ](#)

複数の音源を探査するアレー信号処理の方程式と解法 例, 日本音響学会講演論文集, pp.607-610, (2015.3).



音源方向を変数としたアレーの信号処理の方程式を導出し, シミュレーションでは角距離 3° の 3 音源の探査ができることを示した.しかし, 音波の測定値は偏差が大きいので, 音波での実用は困難と考えている.

時間領域

$$\begin{aligned}
 & p_1(t) - p_2(t + t_{\text{delay},1}) - p_2(t + t_{\text{delay},2}) - p_2(t + t_{\text{delay},3}) \\
 & + p_3(t + t_{\text{delay},1} + t_{\text{delay},2}) + p_3(t + t_{\text{delay},2} + t_{\text{delay},3}) + p_3(t + t_{\text{delay},3} + t_{\text{delay},1}) \\
 & - p_4(t + t_{\text{delay},1} + t_{\text{delay},2} + t_{\text{delay},3}) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

周波数領域

$$\begin{aligned}
 & P_1(f) - (e^{i\theta_{\text{delay},f,1}} + e^{i\theta_{\text{delay},f,2}} + e^{i\theta_{\text{delay},f,3}}) P_2(f) \\
 & + (e^{i(\theta_{\text{delay},f,1} + \theta_{\text{delay},f,2})} + e^{i(\theta_{\text{delay},f,2} + \theta_{\text{delay},f,3})} + e^{i(\theta_{\text{delay},f,3} + \theta_{\text{delay},f,1})}) P_3(f) \\
 & - e^{i(\theta_{\text{delay},f,1} + \theta_{\text{delay},f,2} + \theta_{\text{delay},f,3})} P_4(f) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

[目次へ](#)

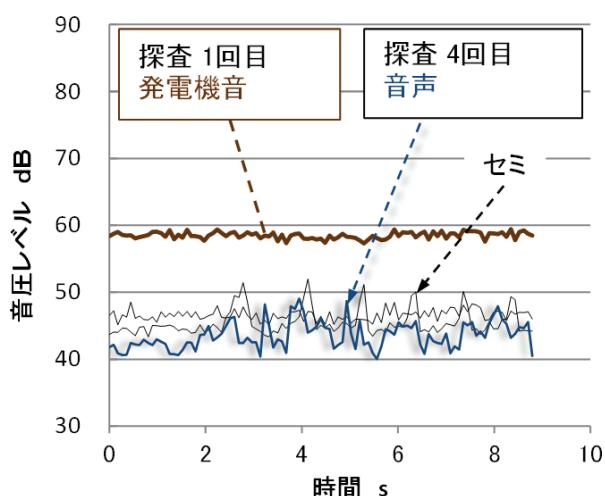
逆音源を音源位置に仮想するアレー信号処理に関する研究, 筑波大学, 博甲第 6088 号 (2012).



複数の音をマイクロホンアレーで受信し, 大きい音の信号を仮想的な逆音源で打ち消すことで小さい音の信号を抽出. スピーカーの音源で実証した. 筑波大の社会人学生としての博士論文. 内容の一部に入学前の職務成果を含むが, 入学後は休日夜間の自費での実験.

[目次へ](#)

捜索活動の支援を目的とした高騒音環境での音源探査手法, 土木学会論文集 F6 (安全問題), Vol. 67, No. 2, pp.I 11-I 16 (2011).



上記の研究の主要部分. 災害時の騒音環境で行方不明者の発するかすかな音を探査する装置の開発を目標とし, セミ等の音が混入する屋外で二つのスピーカーから発電機音と音声を発生させる実験で実証した. 実用には時間と予算をかけた研究が必要と考えている.

[目次へ](#)

3 提案,アイデア(職務外).内容についての責任は負いません.

309 駅の転落抑制用のポール (2016.09).



転落抑制のためのポールを駅のホームに設置する.ホームドアが設置されるまでの暫定措置.

308 100 億人のお祝い(2016.08).

将来, 世界の人口は 100 億人になると思います. その年にお祝いすること, および 100 億人が健康で豊かに暮らせるための科学技術, 政治経済等を世界の目標としてはと思います.

[目次へ](#)

307

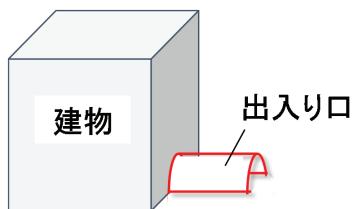
旅行体験ができる窓(2016.07).



窓を模擬したモニタ等に観光地、夜景等を投影。遠出が困難な方の旅行体験、レストラン・ホテル・病院・会議室等のサービス向上。

306

トンネル型エアカーテン(2016.08).



建物の出入り口をトンネル型にし、天井、側面のファンで圧力を調整することで冷暖房のロスをなくす。計算、実験等の根拠はないが、対面交通のトンネルの排気ガス濃度、および風向風速の測定値を観察した経験に基づく発想。

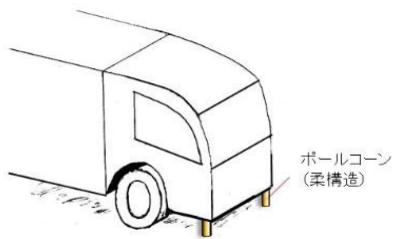
305

小型で安全な自動車(2016.08).

燃料費 100 円で 100 km 走行可能で大型車に追突されても乗員が負傷しない構造の小型車の開発。

304

車輪前方の障害物よけ(2016.08).



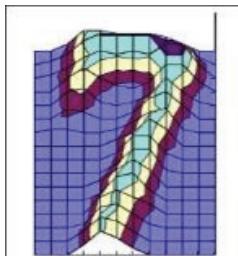
車輪前方にポールコーンのような柔構造の障害物よけを設置.燃費改善の可能性も. 実用には安全性の確認が必要.

[目次へ](#)

- 303 [重力式マッサージ機](#), 特開 2004-130019, (2004).出願のみ.

将来, ロボットがマッサージ機に進展するのではとの思いつき.

- 302 [フレキシブルマトリックスパターン認識](#), 特開 2003-99715, (2003).出願のみ.



「7」のテンプレート

多数の事例の平均をテンプレートとし, 照合させるパターン認識. パターン認識の解説本とは全く異なる方法を思いついたので出願した.

- 301 [出資式大規模自然災害保険システム](#), 特開 2003-058711, (2003).出願のみ.

大規模災害用の募金形の保険. 無災害では配当, 災害時には募金化. 現状の保険制度の補完. ビジネスマデル特許になるかなとの思いつき.

[目次へ](#)

4 初めて作成した web site (1996)

アドレスは <http://www3.justnet.ne.jp/~yoshinaga/>でした。



パーソナル物流ネットワークの提案(この餅を食べられたら！？)([2019PDF](#))



様式集！？

[重回帰分析\(4変数,3変数の重回帰分析が数値を入力するだけでできます.\(EXCELで作成1996\)](#)

[ハッテリ式建設機械について試算したものです.\(EXCELで作成 1996\)](#)

[地球の反射率と温度の関係を簡易に計算したものです.\(EXCEで作成 1996\)](#)



論文集

[機械施工安全対策評価手法](#)

[阪神大震災後における建設機械の活用\(\[2019PDF\]\(#\)\)](#)

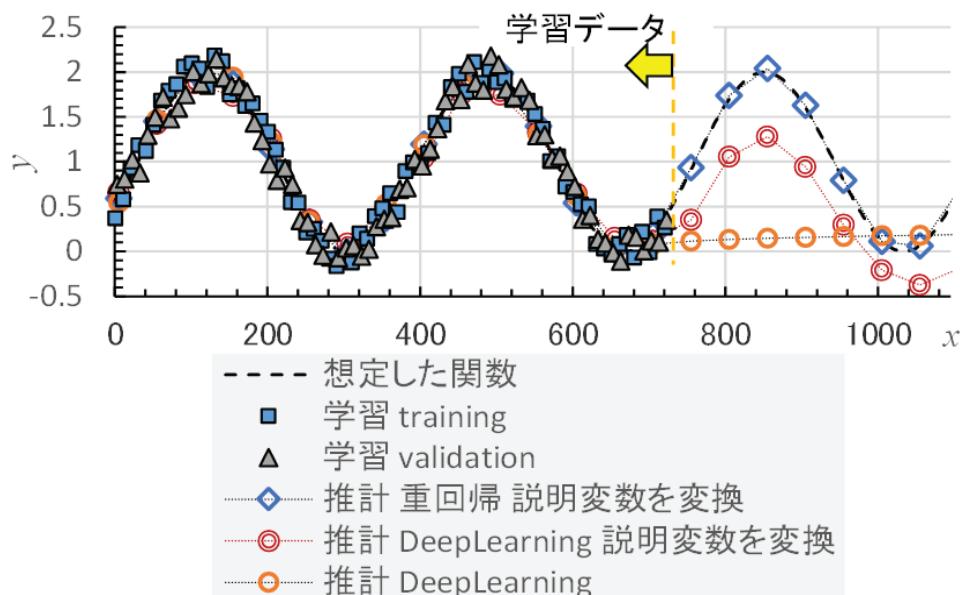
[目次へ](#)

5 研究成果(職務.抜粋.)

522 重回帰分析とディープラーニングの比較, 土木情報学シンポジウム講演集 vol.44, 57, 2019.

重回帰分析と AI(ニューラルネットワーク^{*1})のデータ解析を比較した。説明変数と目的変数が線形(直線)の関係の場合(説明変数を変換して線形にできる場合も含む)は AI よりも重回帰分析の方が優位であり、非線形(曲線)の場合は、AI が優位あること等を把握した。

* 1: 論文では Deep learning と表記したがソフトの自動設定で隠れ層を使用しない(= Deep learning でない)ニューラルネットワークとなっていた可能性がある。

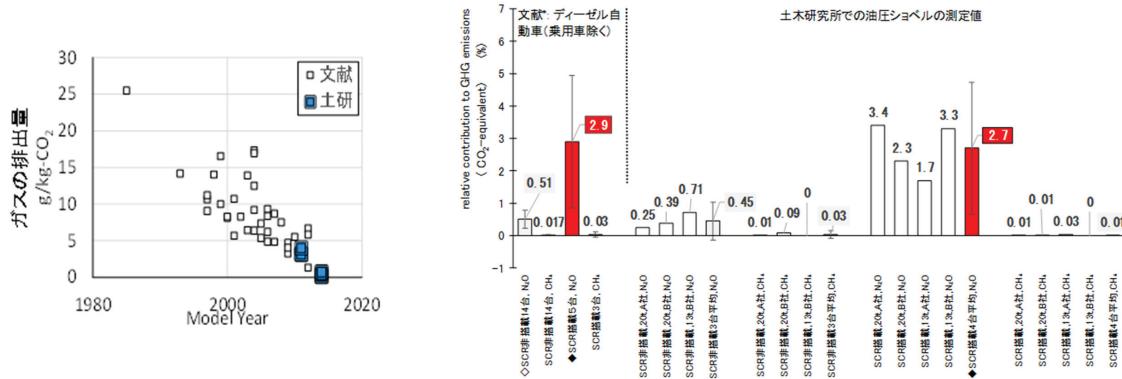


ダミーデータの解析例.

521 建設機械から排出される温室効果ガスの亜酸化窒素およびメタンの研究, [土木研究所資料第 4385 号](#), 2019.

油圧ショベル7台の排出ガスをフーリエ変換赤外分

光光度計FTIRで測定し、以下を明らかにした。(1)亜酸化窒素N₂Oの温室効果ガスとしてシェアは、NOx対策のSCR搭載した機種で2.7%。(2) NOx, CO, および非メタン炭化水素NMHCの測定値は、エンジン単体の台上試験で定められた規制値と整合。(3)建設機械もオンロード車と同様に排出ガスの測定によるカーボンバランス法で燃料消費量を測定できる。



NOxの測定値. 温室効果ガスのCH₄とN₂Oの測定値.

520

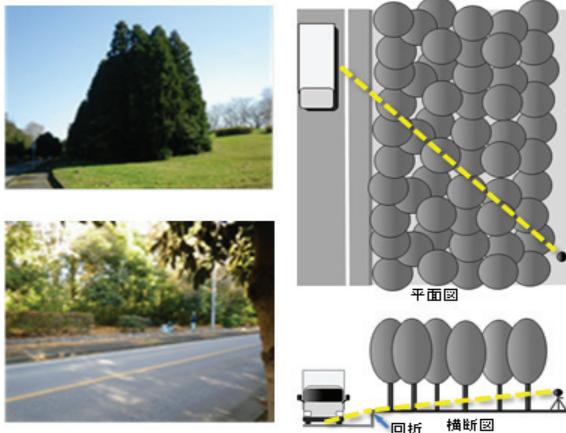
建設機械の排出ガス測定にかかる信頼性向上と簡素化,
土木学会論文集 G(環境), Vol.73, No.6 (環境システム研究論文集 第45巻)、II_321-II_332, 2017.

建設機械の排出ガスの評価量をCO₂比とすることで、測定値の信頼性向上と測定の簡素化が両立すること等を明らかにした。

目次へ

519

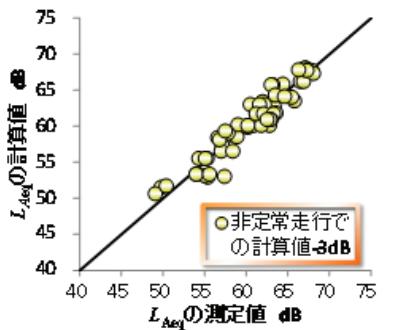
植樹帯での道路交通騒音の減衰量にかかる測定と解析, 土木学会論文集 G(環境), Vol.72, No.6 (環境システム研究論文集 第44巻)、II_I-II_8, 2016.



植樹帯上の樹木による
道路交通騒音の低減量を
測定し、母平均の真値は
 $0.22 \sim 0.04 \text{ dB / m}$ の可
能性が高いと推定した。

目次へ

- 518 規制速度 40km/h 以下の道路における騒音振動の測定
値、日本音響学会騒音・振動研究会資料 N-2016-
03,(2016).



等価騒音レベル L_{Aeq} の
計算値と測定値。

規制速度 40km/h 以下の道路
における騒音振動の測定値、お
よび測定値の近似式。規制速度
 50km/h 以上の幹線道路と異
なり知見がなかったので測定
した。

517

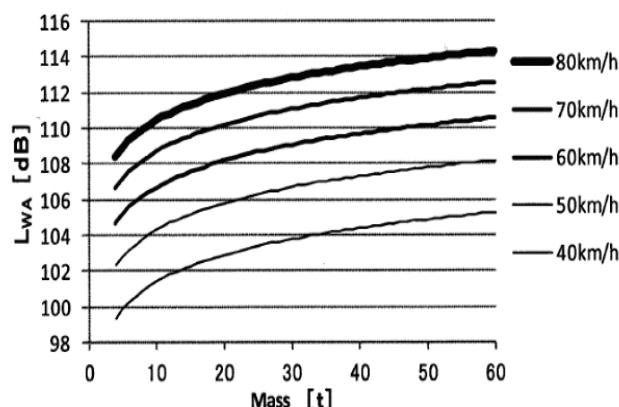
ドライバーへの啓発による騒音対策の試行, 第 31 回日本道路会議, 1080, (2015).



横断幕やポールでドライバーに穏やかな運転を促す啓発を試した。即効性ではなく交通事故の抑制も含めた社会全体の意識改革も目的としていた。

516

公道を定常走行する大型車の質量・速度・騒音の測定値, 自動車技術会論文集, Vol.46, No.4,(2015).



質量 Mass, 速度, 騒音発生量 L_{WA} (dB 換算値)の関係.

大型車の速度, 質量, および騒音を公道で測定し, 騒音(mW)が速度(km/h)の 3 乗, 質量(t)の 0.5 乗に比例する式で近似した。

[目次へ](#)

遮音壁による道路交通騒音の低減量にかかる計算値および実物大の構内試験値, 日本音響学会講演論文集, pp.999-1001 (2015.03).

遮音壁による道路交通騒音の低減量について, 「回折補正量の計算式」5種類(式により計算値が最大4dB異なる), および「騒音伝搬の考え方」6種類(地面反射音(Fig. 1)の考慮の有無等)を組み合わせた「30種類の計算方法」と「実物大の構内試験値」の相関を調べた。「正確さ」と「実務対応」を総合的に考慮すると以下を組み合わせた計算方法が最も妥当(結果はFig.2)。

- ①ASJ-RTN Model 2013 の回折補正量
- ②挿入損失の考え方(ASJ-RTN Model 2013 の(3.13)式)
- ③地面反射は考慮しない(ただし, 反射音の存在は否定しない)

元データを掲載した web site.

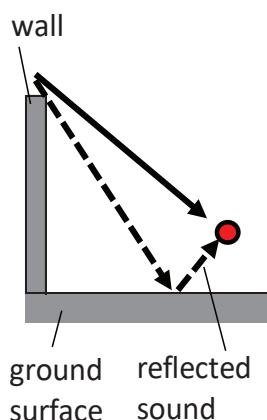


Fig. 1 Reflected sound.

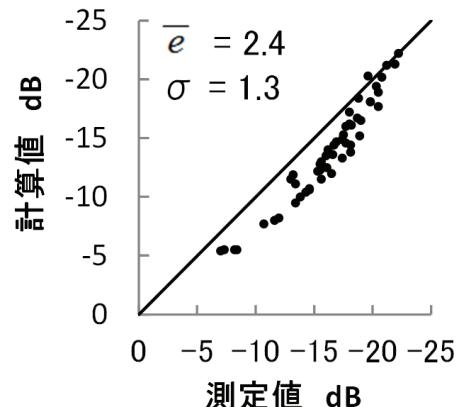


Fig. 2 Best practical way.

目次へ

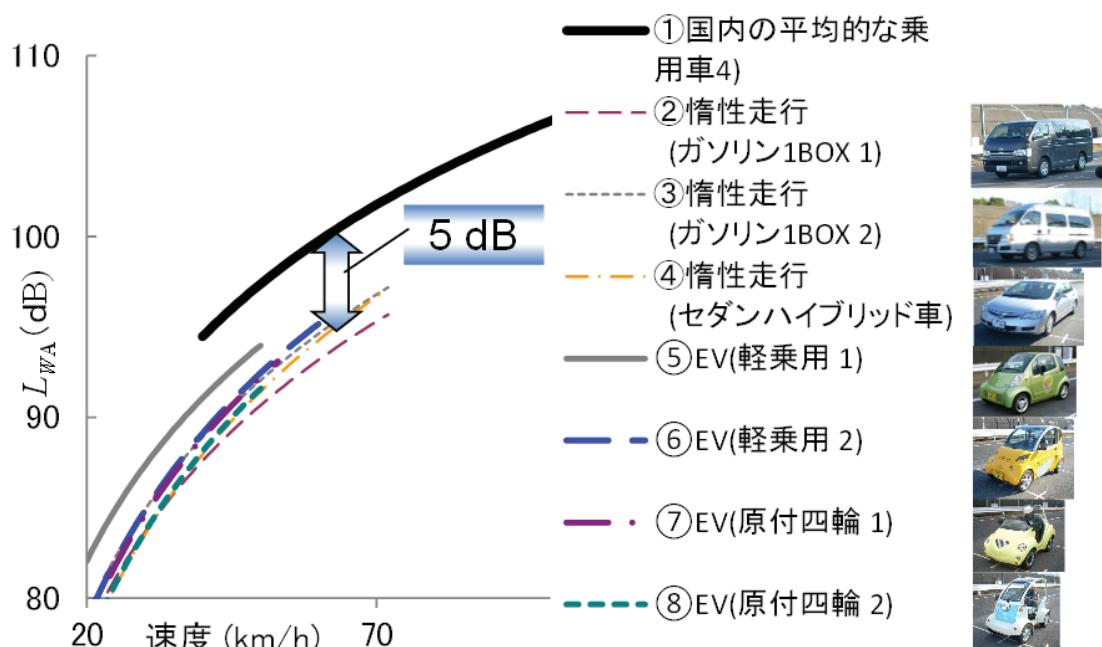
道路交通騒音対策の参考資料、国土技術政策総合研究所資料 第806号、(2014).

道路交通騒音に関する法律、計算、および対策の概要をまとめた。海外の基準を調査した結果等を含む。膨大な情報のなかから100頁程度に絞り込んだ。

表-A7.2 既設道路にかかる道路交通騒音の基準値

	イギリス	ドイツ	フランス	スウェーデン
基準値	騒音対策最優先地選定は屋外 L_{A10} , 18h (6-24) 76 dB (55dBを超えた騒音に暴露されている人口の1%とした結果)	屋外 L_{Aeq} dB [6~22時/22~6時] [70/60]住宅地域 [72/62]中心地域 [75/65]商業・工業地域	屋外 L_{Aeq} , 6-22 65 dB 屋外 L_{Aeq} , 22-6 60 dB 屋外 L_{den} 65 dB 屋外 L_{night} 65 dB (対策後の上限値)	新設・改良の推奨値を10 dB以上超過した場合 (屋外 L_{Aeq} , 24h 65 dB 定住地 屋外 L_{AFmax} 80 dB 業務地区 屋内 L_{AFmax} 55 dB に相当) はアクションプランを策定。
根拠法および強制力	EU指令に基づくアクションプラン(作成中) [行政目標]	連邦交通省の通達州法または州ごとの取組 [行政目標]	騒音に関する通達、環境騒音防止計画(PPBE)の策定に関する施行令	道路交通騒音に関するガイドライン(WHOの推奨に従ったもの)[行政目標]
騒音対策	対策は今後	道路構造対策、交通流対策、沿道の既存住宅への防音助成。	道路構造対策、交通流対策、沿道の既存住宅への防音助成(現状では国道のみ)	道路構造対策、交通流対策、建物移転
対策の実施主体	[Highways Agency, 道路管理者および地方自治体]		[道路管理者]	

※本表は各国の担当者への聞き取り調査に基づくものであり、全ての基準等を網羅したものではない。



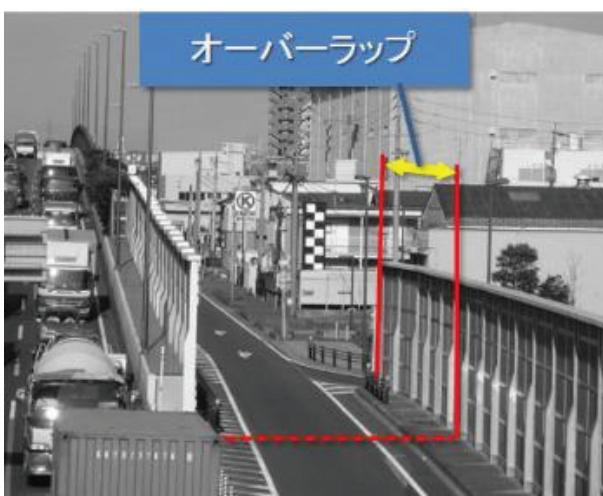
電気自動車等の騒音(①は公道、その他は試験走路)。

[目次へ](#)

- 513 [道路用遮音壁に関する景観評価の現状と事例, 国土技術政策総合研究所資料 第 788 号, \(2014\).](#)

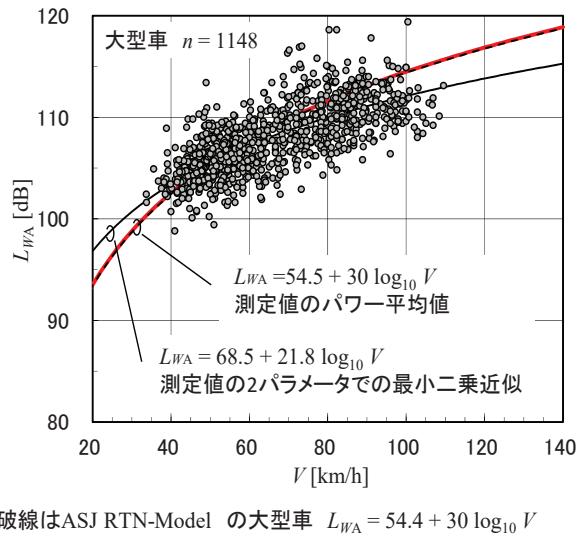
道路景観に関するマニュアルやガイドライン等における景観評価の動向, 景観配慮項目と景観対策, および景観に配慮した遮音壁の事例について整理した.

- 512 [オーバーラップさせた遮音壁の近傍における騒音の計算方法, 土木学会論文集 G\(環境\), Vol.70, No.6 \(環境システム研究論文集 第 42 卷\), II_331- II_340 \(2014\).](#)



遮音壁の開口部をオーバーラップさせた構造での騒音の計算方法を提案し, 模型実験で妥当性を確認した.[元データを掲載した web site.](#)

[目次へ](#)

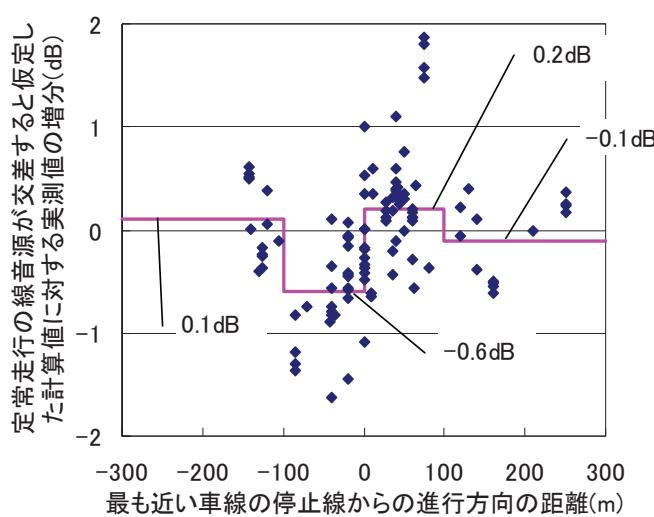


大型車の測定値の例.

>公道を走行する自動車から発生する騒音 L_{WA} を 2010 年に測定した。1999 年の文献値と比較して乗用車で 1.0dB、小型貨物車で 1.6dB 大きい値になり、中型車および大型車は同程度となつたが、沿道騒音の計算値は 1999 年の文献値に基づく方が正確であった。[元データを掲載した web site.](#)」

[目次へ](#)

信号交差点近傍における交通騒音の現場測定値の分析,
騒音制御, Vol.33, No.1, pp.65-75 (2009).

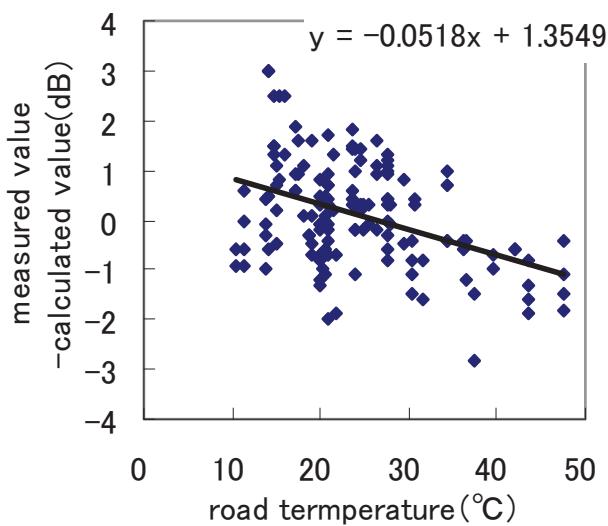


定常走行の線音源が交差する仮定の計算値に対する実測値の増加.

信号交差点近傍における等価騒音レベル(L_{Aeq})は、定常走行の線音源が交差するとの仮定での計算値に対し、減速部で平均0.6dB減少し、加速部で平均0.2dB増加していることを明らかにした。

[元データを掲載したweb site.](#)

定常走行部における道路交通騒音の測定値と計算値との比較および路面温度等の影響, 日本音響学会講演論文集, pp.1081-1082 (2008.9).



路面温度と計算誤差の単回帰.

道路交通騒音の測定値と計算値を比較し、道路交通騒音は路面温度が高くなると $-0.071 \text{ dB} / {}^\circ\text{C}$ （多変量解析・単回帰では $-0.052 \text{ dB} / {}^\circ\text{C}$ ）で低下する傾向等を把握した。

目次へ

- 508 建設工事騒音・振動・大気質の予測に関する研究(第3報), 土木研究所資料第 4010 号(2006).

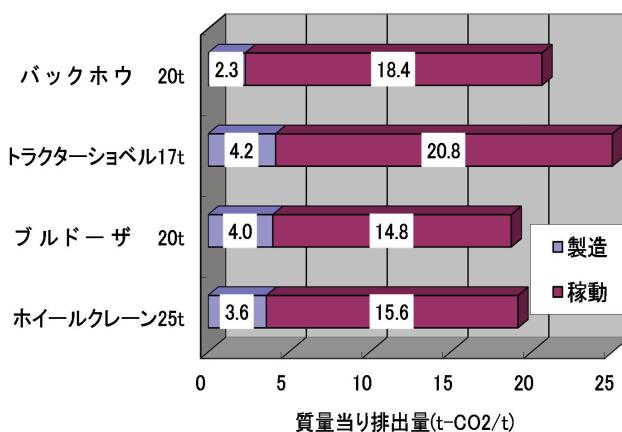
土木工事で発生する騒音, 振動, および降下ばいじんの測定値を整理した. 調査結果は以下で活用された.

「道路環境影響評価の技術手法」

- 507 土木工事振動の現場測定値, 騒音制御, Vol.29, No.5, pp.397-402 (2005).

工事振動の測定値を Bornitz の式にあてはめて整理した. 幾何減衰は距離の -1.5 乗に比例する減衰とし, 内部減衰(粘性減衰)は超高周波バイブロとその他の全工種の 2 種類とした.

- 506 建設機械のライフサイクルにおける二酸化炭素排出, 建設施工と建設機械シンポジウム論文集 (2005).



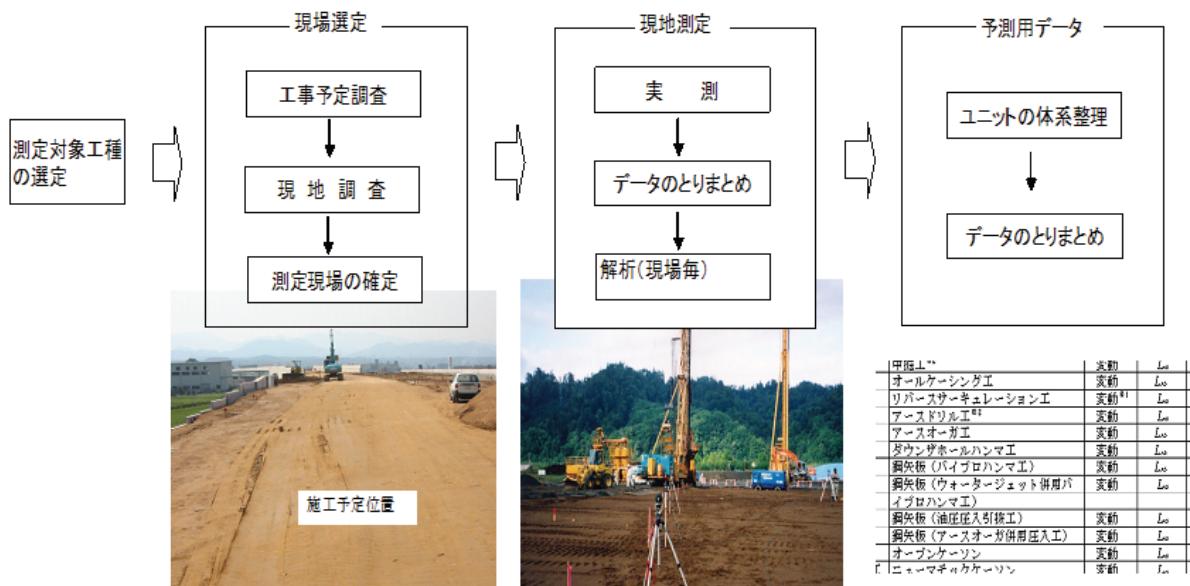
建設機械の製造, 稼動, および廃棄のライフサイクルにおける二酸化炭素排出量を整理した.

建設機械のライフサイクルで排出される CO_2 .

目次へ

- 505 工事の実施による大気環境に係わる環境影響評価に関する研究, 建設施工と建設機械シンポジウム論文集(2005).

工事中の騒音・振動・粉じんの環境影響評価の手法にかかる「適用範囲の拡大」, 「環境保全措置」および「測定方法」の課題への対応策, ならびに「予測用データのとりまとめ方針」を検討した.

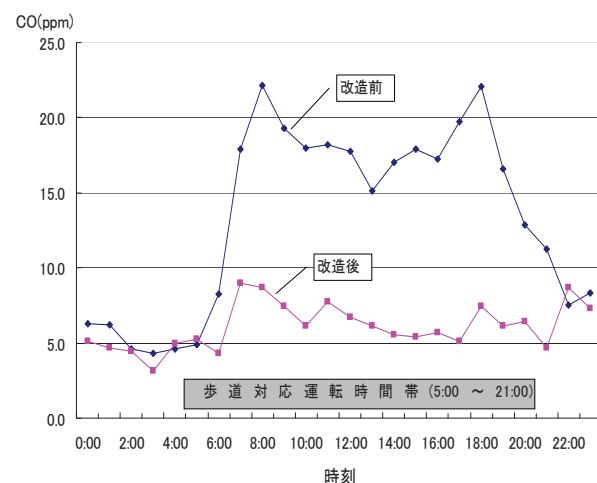
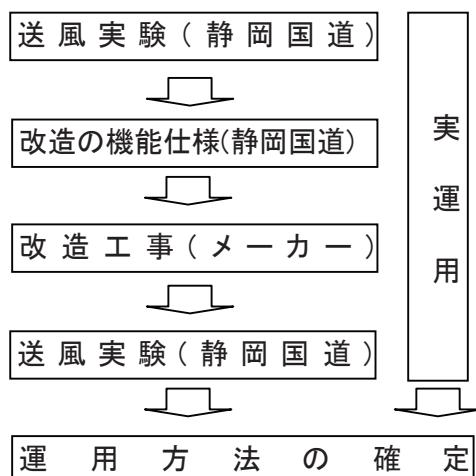


現地測定による予測用データの収集解析.

目次へ

換気風向の最適化によるトンネル内歩道の環境改善, 土木学会第 58 回年次学術講演会, pp.475-476 (2003).

トンネル内の歩道の大気環境の改善を求める住民要望に対応し、換気装置を改造した。改造では遠隔で実験できるようにし、送風方向を制御するパラメータを測定データに基づいて最適化した。パラメータの最適化にあたっては、風向風速計の測定値が近車線の走行風の影響を受け真値とは異なる値になることを考慮した。排ガス濃度は半減したが通行者の 8 割は不満との評価であった。住民要望から改造機の実運用までの期間は 1 年。



手動制御での送風実験
→改造成工事→送風実験
→運用方法の確定

排ガス濃度は改造前の 1/2 以下。

汎用機械を 10 分で無人化, 日経コンストラクション 1998 2-27.

電気レバー式の油圧ショベルを 10 分で遠隔操作化する公開実験を行った。

[目次へ](#)

502 機械施工安全対策評価手法について, 中部地方建設局管内事業研究発表会(1997).

機械化施工における安全対策を整理し(1200項目), 死亡事故事例と照合することで特に重要な安全対策を抽出した(77項目). 抽出した(77項目).

501 兵庫県南部地震後における建設機械の活用状況, 土木研究所資料第3410号(1996). /震災復旧における建設機械, 建設の機械化96.9, pp.4-11. / 要約(PDF)

兵庫県南部地震(阪神大震災)後における建設機械の活用についてヒヤリング, および記事の調査を行い以下の要点をまとめた.

- ・直後は人命救助等の需要が発生.
 - ・基準, マニュアルの想定外のことがおこった.
(協定会社の被災等) .
 - ・復旧工事における労働災害の多発
(約1年間で40名死亡, 904人負傷) .
 - ・粉塵の発生.
 - ・交通渋滞による輸送時間の増加
(通常の2~3倍, 直後は10倍以上の例も) .
 - ・人, 機械の手配は平時の付き合いを中心として行われる.
 - ・水が使用できない(水道98%復旧まで2ヶ月) .
 - ・給水用としての散水車の活用(建設省で34台) .
-

以上. [目次へ](#)

100mを20秒で往復する時間の相対論効果

-相対性理論の簡素な解説-

-「ローレンツ変換した時間と距離」と「測定を想定した時間と距離」の違い-

1. はじめに

宇宙旅行をすると経過時間が短くなる相対論効果は100mを20秒で往復する場合にも生じる。本稿では加減速を伴う走行で100mを20秒で往復する場合の相対論効果の計算例を示す。私は高校生の時にインシュタインに憧れ相対性理論を大学で学べたらと思って受験勉強したが物理学科には行かなかった。行ったとしても数学で挫折していたと思う。数年前に一般相対性理論の計算式の解説本[1]を偶然一般書のコーナーで見かけ懐かしいと思って購入し計算式を知ることができた。しかし、基本的な意味が「なんとなくよくわからなかった」ので「自己流で解説」した。インシュタインの数多くの研究成果のなかの相対性理論のなかの入口部分の一部だけでも自分なりに理解できたので満足している。相対性理論は、等速での特殊相対性理論と加速や重力がある空間に拡張した一般相対性理論がある。本稿では位置を1次元とした単純な条件として加速や重力がある条件では速度を変数として簡便な特殊相対性理論のみで計算した。計算方法が妥当であることはスカイツリーやGPS衛星での相対論効果にかかる公表値と比較して確認した。本稿で示した計算例についてはどなたかが「同じ計算条件で計算して答え合わせ」をしていただけないかと期待している。

本稿の構成をTable 1.1に示す。2. ローレンツ変換では相対性理論[2]に準じた座標系、変数、および計算式を示す。3. 等速走行では、相対論効果をわかりやすくするために光速を実際とは異なる 15 ms^{-1} (15m/s)として計算し、時間と距離の計算値の伸縮について考察する。その後に、光速を実際の $3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ (30万km/s)とした計算値を示す。4. 加減速を伴う走行では、停止、加速、等速、減速、そして停止の過程での相対論効果を計算する。最初に計算式を提示し、

Table 1.1 構成。

2. ローレンツ変換	座標系、変数、計算式。
3. 等速走行	100mを10秒で通過する場合について光速 $c = 15 \text{ ms}^{-1}$ 、および $3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ とした試算。時間と距離の伸縮についての考察。
4. 加減速を伴う走行	加速走行の計算式。加速、等速、および減速で100mを10秒で走行する場合について光速 $c = 100 \text{ ms}^{-1}$ 、 15 ms^{-1} 、および $3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ とした試算。時間と距離の伸縮についての考察。100mを20秒で往復する場合の時間。
5. 双子のパラドックス	既存の文献等とは異なる解説。
付録.1 動く棒の長さが縮む相対論効果	速度 $v = 10 \text{ ms}^{-1}$ で走行する車の中にある長さ $l = 10 \text{ m}$ の棒の伸縮。メートル原器の伸縮に関する考察。
付録.2 重力による相対論効果	スカイツリー、GPS衛星での相対論効果の計算例。

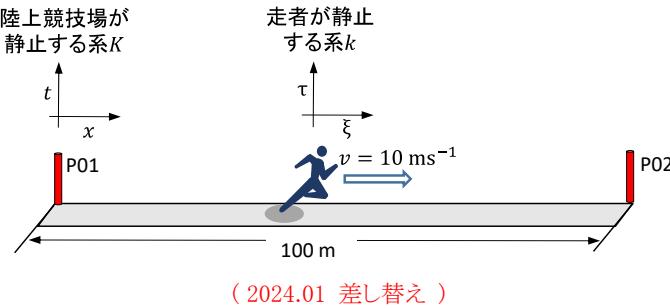
次に光速を 15 ms^{-1} とした試算で考察し、最後に光速を $3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ とした場合の計算結果を示す。100m 地点に達して折り返すときに減速して停止するので往復の場合には単純に片道の 2 倍とした。5. 双子のパラドックスでは本稿での独自の考え方を示した。双子のパラドックスに関しては、数多くの図書や web site で解説されているが本稿の解説は異なる。付録.1 では動く棒の長さの伸縮について述べた。ローレンツ収縮といわれることが単純な収縮でないことを説明する。さらにメートル原器の伸縮についての考察から光速が変化するとの前提での理論の構築について提言した。付録.2 では解説本[1]での解説を自分なりに解釈し、重力による相対論効果の考え方とスカイツリー、および GPS 衛星での計算値を示した。

2. ローレンツ変換

座標系 K の時間 t 、および位置 x と、 K に対して速度 $v = dx/dt$ で移動している座標系 k の時間 τ 、および位置 ξ の関係（いわゆる「ローレンツ変換」）は、光速を c とすれば、

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \xi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \text{Eq.2.1.}$$

記号の K, k, t, x, τ, ξ および v は、インシュタインの特殊相対性理論[2]に準じ、位置は 1 次元 x, ξ のみとした。計算式は相対性理論と同じであるが見やすいように行列で表記した。本稿の計算は全て Eq.2.1 から導出している。具体的なイメージを Fig.2.1 に示す。陸上競技場が静止する座標系 K と走者が静止する座標系 k での時間と位置の関係式になる。



(2024.01 差し替え)

Fig.2.1 100m を 10 秒で通過する走者と陸上競技場。

k で静止する点 $\xi = 0$ への変換（走者が静止し、 $\xi = 0$ となる座標系 k への変換）の場合は Eq.2.1 で $x = vt$ とすることで陸上競技場の時間 t_{field} を走者の時間 τ_{runner} に換算する式は、

$$\tau_{\text{runner}} = \sqrt{1 - v^2/c^2} t_{\text{field}} \quad \text{Eq.2.2.}$$

となる。速度 v が光速 c と比較して十分に小さい場合には $\tau_{\text{runner}} \cong t_{\text{field}}$ であるが光速に近づくと $\tau_{\text{runner}} < t_{\text{field}}$ となり宇宙旅行をすると時計の進み方が遅くなると一般に言われている現象が生じる。

なお、電卓等で計算する際に $v^2/c^2 \ll 1$ で有効数字が不足する場合は、

$$\tau_{\text{runner}} \cong \left(1 - \frac{1}{2} v^2/c^2\right) t_{\text{field}} \quad \text{Eq.2.3}$$

として近似することになる。

3. 等速走行

3.1 光速を毎秒 15m とした試算

ここでは 100 m を 10 秒で通過する $v = 10 \text{ ms}^{-1}$ の走行について計算する。まずは、結果のイメージがいだきやすいように $c = 15 \text{ ms}^{-1}$ とする。Eq.2.1 は、

$$(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 - 10^2/15^2}} \begin{pmatrix} 1 & -10/15^2 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} (t)$$

となる。計算する時点 t は走者が P01、および P02 を通過する $t = 0$ 、および $t = 10$ とし、計算する地点 x は P01、走者、および P02 とする。計算結果は Table 3.1 となる。Fig.3.1 は走者 runner が静止する座標系 k をグラフ化したものである。走者が P02 を通過する時点で陸上競技場の経過時間は 10 秒となるのに対して走者の経過時間は 7.46 秒に短縮される(Table 3.1 の 4 行目)。

Table 3.1 100m を 10 秒で通過する走行の相対論効果-光速が毎秒 15m の場合。

行	変 数				数値が示す意味	
	座標系 K 陸上競技場が静止		座標系 k 走者が静止		時 点	示す値
	t	x	τ	ζ		
1	0	0	0	0	走者が P01 を 通過 ($t = 0$)	P01 と走者の時間と位置
2	0	100	-5.96	134.2	走者が P02 を 通過 ($t = 0$)	P02 の時間と位置
3	10	0	13.42	-134.2	走者が P01 を 通過 ($t = 10$)	P01 の時間と位置
4	10	100	7.46	0	走者が P02 を 通過 ($t = 10$)	走者の時間と位置

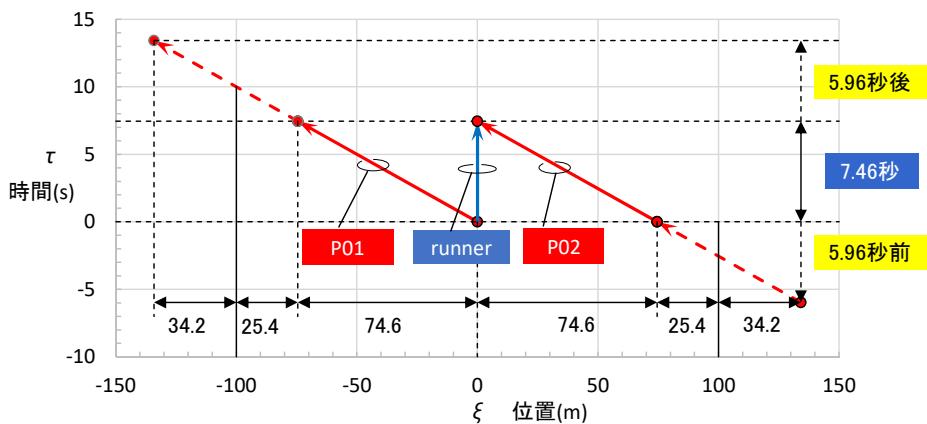


Fig.3.1 100m を 10 秒で通過する走者が静止する座標系 k での位置と時間。

ここで Table 3.1 の 1 行目と 2 行目について Fig.3.1 で考察する。座標系 K において走者が P01 を通過する時点 $t = 0$ は、座標系 k の走者では $\tau = 0$ 、P02 では $\tau = -5.96$ となり、座標系 K において同時の事象が座標系 k では同時でなくなる。P02 は過去の -5.96 秒に走者から 134.2m 離れた位置にいて $7.46 - (-5.96) = 13.42$ 秒かけて走者の位置に達する。しかし、座標系 k での測定を想定すると走者が P01 と同じ位置にいる時点 $\tau = 0$ で P02 は 74.6m 離れた位置にいて、その後 7.46 秒かけて走者の位置に達する。P02 の移動距離は 100m ではなく 134.2m ではなく 74.6m となる。「**陸上競技場の時間と距離はローレンツ変換で拡大する。しかし、測定を想定すると収縮**」することになる。常識では「計算値=測定を想定した計算値」であることに疑念はないが、相対性理論を理解するためには「ローレンツ変換した時間と距離」と「測定を想定した時間と距離」が乖離することを考察する必要があると思う(宇宙物理の先生(匿名)に相談したら、計算値は測定を想定した計算値とすべき旨を御教示いただきました。)。5. 双子のパラドックスで後述するが、「双子のパラドックスとの誤解の主要因はこの二面性を見落として収縮のみを考察していること」と考えている。

(2023.03 赤字部分修正)

3.2 経過時間と距離の伸縮

ここで、時空上の 2 点の時間差と位置の差を Δ とし変数を Table 3.2 として拡大と収縮を整理する。

Table 3.2 変数.

変 数	座標系	意 味
Δt_{runner}	K (陸上競技場が静止)	走者の経過時間
Δx_{runner}		走者の距離
Δt_{field}		陸上競技場の経過時間
Δx_{field}		陸上競技場の距離
$\Delta \tau_{\text{runner}}$	k (走者が静止)	ローレンツ変換した走者の経過時間
$\Delta \xi_{\text{runner}}$		ローレンツ変換した走者の距離
$\Delta \tau_{\text{field,transformation}}$		ローレンツ変換した陸上競技場の経過時間
$\Delta \tau_{\text{field,predicted measrement}}$		測定を想定した陸上競技場の経過時間
$\Delta \xi_{\text{field,transformation}}$		ローレンツ変換した陸上競技場の距離
$\Delta \xi_{\text{field,predicted measrement}}$		測定を想定した陸上競技場の距離

走者の時間と距離は Eq.2.1, $\Delta t_{\text{runner}} = \Delta t_{\text{field}}$, および $\Delta x_{\text{runner}} = v\Delta t_{\text{field}}$ より,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta \tau_{\text{runner}} \\ \Delta \xi_{\text{runner}} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{\text{runner}} \\ \Delta x_{\text{runner}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta t_{\text{field}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{Eq.3.1}$$

Eq.2.2 と同じである.

陸上競技場の時間と距離は,

$$\begin{pmatrix} \Delta \tau_{\text{field,transformation}} \\ \Delta \xi_{\text{field,transformation}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{\text{field}} \\ \Delta x_{\text{field}} \end{pmatrix} \quad \text{Eq.3.2}$$

に変換される. Eq.3.2 で $\begin{pmatrix} \Delta t_{\text{field}} \\ \Delta x_{\text{field}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta x_{\text{field}} \end{pmatrix}$ の同時刻で異なる位置は,

$$\begin{pmatrix} \Delta \tau_{\text{field,transformation}} \\ \Delta \xi_{\text{field,transformation}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} -v\Delta x_{\text{field}}/c^2 \\ \Delta x_{\text{field}} \end{pmatrix} \quad \text{Eq.3.3}$$

に変換されるので同時刻でなくなり, 距離が $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 倍に拡大する. また, Eq.3.2 で

$\begin{pmatrix} \Delta t_{\text{field}} \\ \Delta x_{\text{field}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{\text{field}} \\ 0 \end{pmatrix}$ の同一地点での異なる時間は,

$$\begin{pmatrix} \Delta \tau_{\text{field,transformation}} \\ \Delta \xi_{\text{field,transformation}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} \Delta t_{\text{field}} \\ -v\Delta t_{\text{field}} \end{pmatrix} \quad \text{Eq.3.4}$$

に変換されるので異なる位置になり, 時間が $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ 倍に拡大する.

しかし, 座標系 k では陸上競技場は動いており, 時間の測定を想定すると

$\Delta \xi_{\text{field,transformation}} = 0$, 距離の測定を想定すると $\Delta \tau_{\text{field,transformation}} = 0$ である. これらの条件での経過時間, および距離を「測定を想定した経過時間 $\Delta \tau_{\text{field,predicted measurement}}$ 」, および「測定を想定した距離 $\Delta \xi_{\text{field,predicted measurement}}$ 」と称することとし, Eq.3.2 において時間の測定では $-v\Delta t_{\text{field}} + \Delta x_{\text{field}} = 0$, 距離の測定では $\Delta t_{\text{field}} - v\Delta x_{\text{field}}/c^2 = 0$ とする,

$$\begin{pmatrix} \Delta \tau_{\text{field,predicted measurement}} \\ \Delta \xi_{\text{field,predicted measurement}} \end{pmatrix} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \begin{pmatrix} \Delta t_{\text{field}} \\ \Delta x_{\text{field}} \end{pmatrix} \quad \text{Eq.3.5}$$

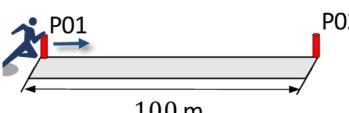
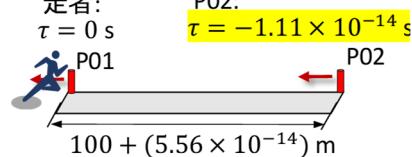
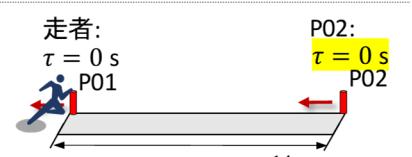
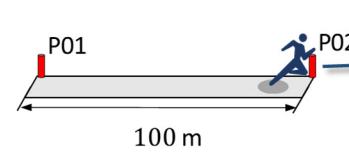
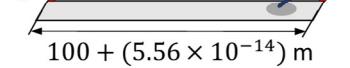
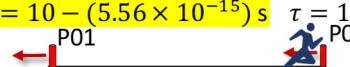
となって陸上競技場の経過時間と距離は座標系 k で縮小することになる. 陸上競技場の経過時間と距離はローレンツ変換すると拡大するが, 測定を想定すると縮小するとの真逆の関係になる.

なお, 実務的な距離の標準は光の到達に要する時間で定められていること, 時間と同じ割合で距離が収縮する Eq.3.5, および光速が一定であることは整合している. 距離の標準をメートル原器とした場合の考察については付録. 1 動く棒の長さが縮む相対論効果, 補足 1: メートル原器の伸縮で述べる.

3.3 光速を毎秒 30 万 km とした試算

光速を実際の $c = 3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ として計算した結果を Fig.3.2 に図示する。走者が静止する座標系 k において走者の経過時間は $5.56 \times 10^{-15} = 0.000\ 000\ 000\ 000\ 00556$ 秒減少する。P01, および P02 の経過時間はローレンツ変換では 5.56×10^{-15} 秒, および $-5.56 \times 10^{-15} - (-1.11 \times 10^{-15}) \cong 5.56 \times 10^{-15}$ (まるめ誤差の調整あり)秒増加するが, 測定を想定するとともに 5.56×10^{-15} 秒減少する。P01, および P02 の移動距離はローレンツ変換では $5.56 \times 10^{-14}\text{m}$ 増加するが, 測定を想定するとともに $5.56 \times 10^{-14}\text{m}$ 減少する

なお, ここでは陸上競技場の距離の伸縮について述べたが, 動く棒の伸縮については付録.1 動く棒の長さが縮む相対論効果で説明する。

■ 陸上競技場が静止する座標系 K	走者が静止する座標系 k
 $t = 0\text{ s}$ 	ローレンツ変換した値  測定を想定した計算値 
\downarrow $t = 10\text{ s}$ 	ローレンツ変換した値 $P01: \tau = 10 + (5.56 \times 10^{-15})\text{ s}$ 走者: $\tau = 10 - (5.56 \times 10^{-15})\text{ s}$  測定を想定した計算値 $P01: \tau = 10 - (5.56 \times 10^{-15})\text{ s}$ 走者: $\tau = 10 - (5.56 \times 10^{-15})\text{ s}$ 

(2024.01 差し替え)

Fig.3.2 100m を 10 秒で通過する走者と陸上競技場の相対論効果。

4. 加減速を伴う走行

実際の走行、および旅行では加減速を伴う。ここでは加速でのローレンツ変換の式を導出して計算する。

4.1 計算式

ここでは走者が静止する座標系 k での走者の経過時間の計算式を示す。陸上競技場の経過時間と距離は Eq.3.4、および Eq.3.5 で計算できる。Eq.2.2 では走者の速度 v は一定として t_{field} 、および τ_{runner} を経過時間としたが、加減速では v が変化するので微分、

$$d\tau_{\text{runner}} = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt_{\text{field}} \quad \text{Eq.4.1}$$

に書き換える。一定速度 v_c から加速度 a で加速する際の速度 $v = v_c + at_{\text{field}}$ の場合は、

$$d\tau_{\text{runner}} = \sqrt{1 - (v_c + at_{\text{field}})^2/c^2} dt_{\text{field}} \quad \text{Eq.4.2.}$$

ここで $v^2/c^2 \ll 1$ の場合について、

$$d\tau_{\text{runner}} \cong \left(1 - \frac{1}{2}(v_c + at_{\text{field}})^2/c^2\right) dt_{\text{field}} \quad \text{Eq.4.3}$$

として近似して積分すると、

$$\Delta\tau_{\text{runner}} \cong \Delta t_{\text{field}} - \frac{3v_c^2 \Delta t_{\text{field}} + 3v_c a \Delta t_{\text{field}}^2 + a^2 \Delta t_{\text{field}}^3}{6c^2} \quad \text{Eq.4.4.}$$

よって、座標系 k と座標系 K での時間の差 $\Delta T = \Delta\tau_{\text{runner}} - \Delta t_{\text{field}}$ は、

$$\Delta T = \Delta\tau_{\text{runner}} - \Delta t_{\text{field}} \cong -\frac{3v_c^2 \Delta t_{\text{field}} + 3v_c a \Delta t_{\text{field}}^2 + a^2 \Delta t_{\text{field}}^3}{6c^2} \quad \text{Eq.4.5.}$$

4.2 試算

停止状態から $a_1 = \frac{100}{21} \text{ ms}^{-2}$ で $\Delta t_{\text{field},1} = 3$ 秒間加速走行、次に $v_c = \frac{100}{7} \text{ ms}^{-1}$ で $\Delta t_{\text{field},2} = 4$ 秒間等速走行、最後に $a_2 = -\frac{100}{21} \text{ ms}^{-2}$ で $\Delta t_{\text{field},3} = 3$ 秒間減速走行して停止する走行を光速 $c = 100 \text{ ms}^{-1}$ として Eq.4.5 で試算する ($c = 15 \text{ ms}^{-1}$ では近似誤差が大きいので $c = 100 \text{ ms}^{-1}$ とした)。停止、加速走行、等速走行、減速走行、および停止により 100m を 10 秒で走ることになる。最初の 3 秒間の加速では、 $v_c = 0$ として、

$$\Delta T \cong -\frac{\left(\frac{100}{21}\right)^2 \cdot 3^3}{6 \cdot 100^2} \cong -0.010$$

次の 4 秒間での等速では $a = 0$ として、

$$\Delta T \cong -\frac{3 \cdot \left(\frac{100}{7}\right)^2 \cdot 4}{6 \cdot 100^2} \cong -0.041$$

最後の 3 秒間の減速では,

$$\Delta T \cong -\frac{3 \cdot \left(\frac{100}{7}\right)^2 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{100}{7} \left(-\frac{100}{21}\right) \cdot 3^2 + \left(-\frac{100}{21}\right)^2 \cdot 3^3}{6 \cdot 100^2} \cong -0.010$$

の合計で $\sum \Delta T \cong -0.010 - 0.041 - 0.010 = -0.061$ 秒となる. Eq.4.2 で $dt_{\text{field}}=0.01$ 秒として表計算ソフトで数値計算した値とも一致した. 次に, 光速 $c = 15 \text{ ms}^{-1}$ として Eq.4.2 で数値計算した結果について横軸を陸上競技場の時間としてグラフ化したものを Fig.4.1 に示す. (1)速度は縦軸を速度としている. (2)時間では縦軸を走者の経過時間としている. グラフの傾きは走行開始時点では $1/1$ であるが加速すると小さくなり, 等速では一定になり, 減速すると $1/1$ に戻る. 加速をすることで時間の進み方が遅くなる系へ移行して傾きが小さくなる状況が把握できる.

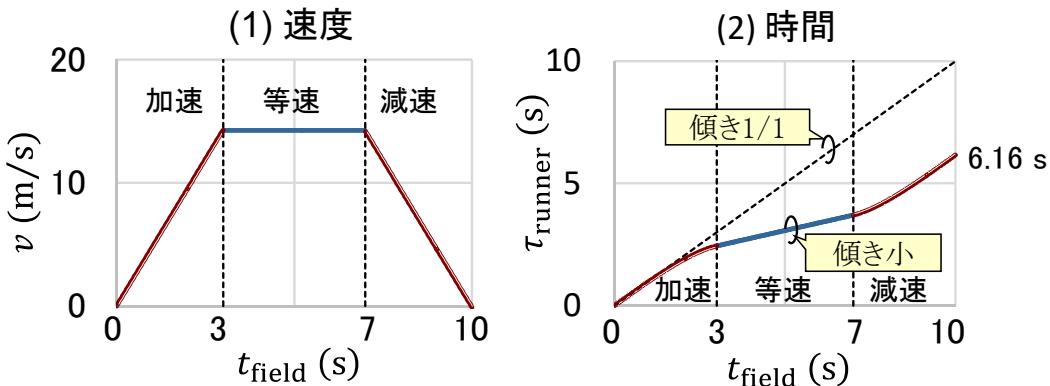


Fig.4.1 加減速をして 100m を 10 秒で走行する時間の相対論効果.
模擬的に光速を 15ms^{-1} として試算.

走者の時間が 6.16 秒に収縮し, 3. 等速走行の場合の 7.45 秒より短くなる.

光速を実際の $c = 3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ として Eq.4.5 で計算すると走者の時間は $10 - 6.80 \times 10^{-15}$ 秒となり, 等速で通過する場合の $10 - 5.56 \times 10^{-15}$ 秒より短くなる.

4.3 100m を 20 秒で往復する時間

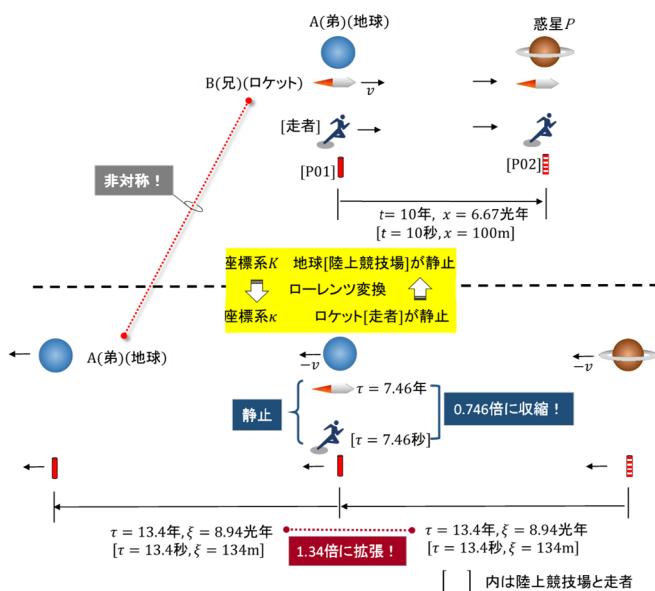
4.2 では片道の計算をしたが 100m の折り返し地点で走者は静止しているので帰路も往路と同じ計算値になる. よって走者の時計での往復の時間は $(10 - 6.80 \times 10^{-15}) \times 2 = 20 - 1.36 \times 10^{-14}$ 秒.

5. 双子のパラドックス

ここで、双子のパラドックスについて考察する。双子のパラドックスとは、宇宙旅行する兄よりも地球に残っている弟の時間経過が早いならば、兄に対して弟が動くと解すれば逆になる旨の矛盾である。3.1 光速を毎秒 15m とした試算の例で説明すると陸上競技場での 10 秒が走者での 7.46 秒になるなら、走者からすると陸上競技場の方が動くので陸上競技場での時間は 7.46 秒より短くなる旨の矛盾である。

このことが誤解であることを Fig.5.1 で説明する。陸上競技場の P01、陸上競技場の P02、走者、秒、および m を宇宙旅行での地球、惑星 A、ロケット、年、および光年で例示している。 $v = \frac{10}{15}c$ (v : 速度, c : 光速) とすれば宇宙旅行での計算結果になる。

走者と陸上競技場はシンメトリーに 100m を 10 秒で逆方向に進むのではない。陸上競技場が静止する座標系 K では走者が 100m を 10 秒で走行し、走者が静止する座標系 k では陸上競技場が 134m を 13.4 秒で走行する非対象な関係である。ロケットで旅行する兄と地球にいる弟はシンメトリーに 100–6.67 光年を 10 年で逆方向に進むのではない。地球が静止(自転や公転による相対論効果は無視できるほど小さいとの意味での静止)する座標系 K では兄のロケットが 100–6.67 光年を 10 年で飛行し、ロケットが静止する座標系 k では地球が 134–8.94 光年を 13.4 年で飛行する非対象な関係である。しかし、座標系 K では同時刻の事象が座標系 k では同時刻でなくなる。位置の測定は同時刻で行うと想定すると陸上競技場、または惑星の距離は 74.6m、または 74.6–4.97 光年に収縮することになり、移動時間も 7.46 秒、または 7.46 年に収縮する。座標系 k から座標系 K に変換するとさらに収縮することになるので矛盾していると誤解していると誤解する。(2023.03 赤字部分修正)



(2024.01 差し替え)

Fig.5.1 宇宙旅行と陸上競技場の相対論効果の模式図。

なお, Fig.4.1 で示したように加減速は時間の進み方が異なる系に移行することである。加減速の走行での相対論効果は Eq.4.2, または Eq.4.5 で計算できる。加減速の区間と比較して等速の区間が長くなると相対論効果で収縮する時間を等速区間だけで計算しても大きくずれることはない。

6. おわりに

解説本[1]を読んで、物理の学生の方はこんな難解なことを短期間で理解しているのかと能力の差を感じた。能力不足を自覚しつつも毎日、あれこれ考えることが楽しかった。小学生のころ辞典に載っていた星雲の美しさに惹かれて繰り返しながらいたし、宇宙は無限に遠くまであるのかとか電波とは何だろうかと疑問に思い子供心で考えていた。そのような疑問に答えてくれるのが物理と知って物理に憧れた。なぜ $E = mc^2$ なのかとか電子が干渉するのかとかは解説本を読んだり、あれこれ考えてもいまだによくわからないし、宇宙の大きさ、年齢および質量が座標系によって 0 や無限大になるような気もする。賢い人が解説してくれないかなと期待している。また、宇宙観測の装置のしくみをマスコミ報道しているのを視聴しても関係の方々の能力の高さに驚愕する。これからも新しい観測が報道されるのを楽しみにしている。

付録. 1 動く棒の長さが縮む相対論効果

座標系 k で静止している長さ $l = 1\text{ m}$ の棒が座標系 K において速度 v で動く場合の長さ L を計算する (Fig.A.1.1).

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & +v/c^2 \\ +v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.A.1.1}$$

となるので Eq.2.1 の逆変換は,

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & +v/c^2 \\ +v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \xi \end{pmatrix} \quad \text{Eq.A.1.2.}$$

座標系 k では棒の一方の端を $(\tau, \xi) = (0, 0)$ とし, もう片方を $(\tau, \xi) = (0, l)$ と同時刻にしても Eq.A.1.2 から, 座標系 K においては $t \neq 0$ となり同時刻でなくなる. ここでは座標系 K における同時刻 $t = 0$ を前提とし, この条件を満たすように τ を設定する. Eq.2.1 で $(t, x) = (0, L), \xi = l$ とすれ

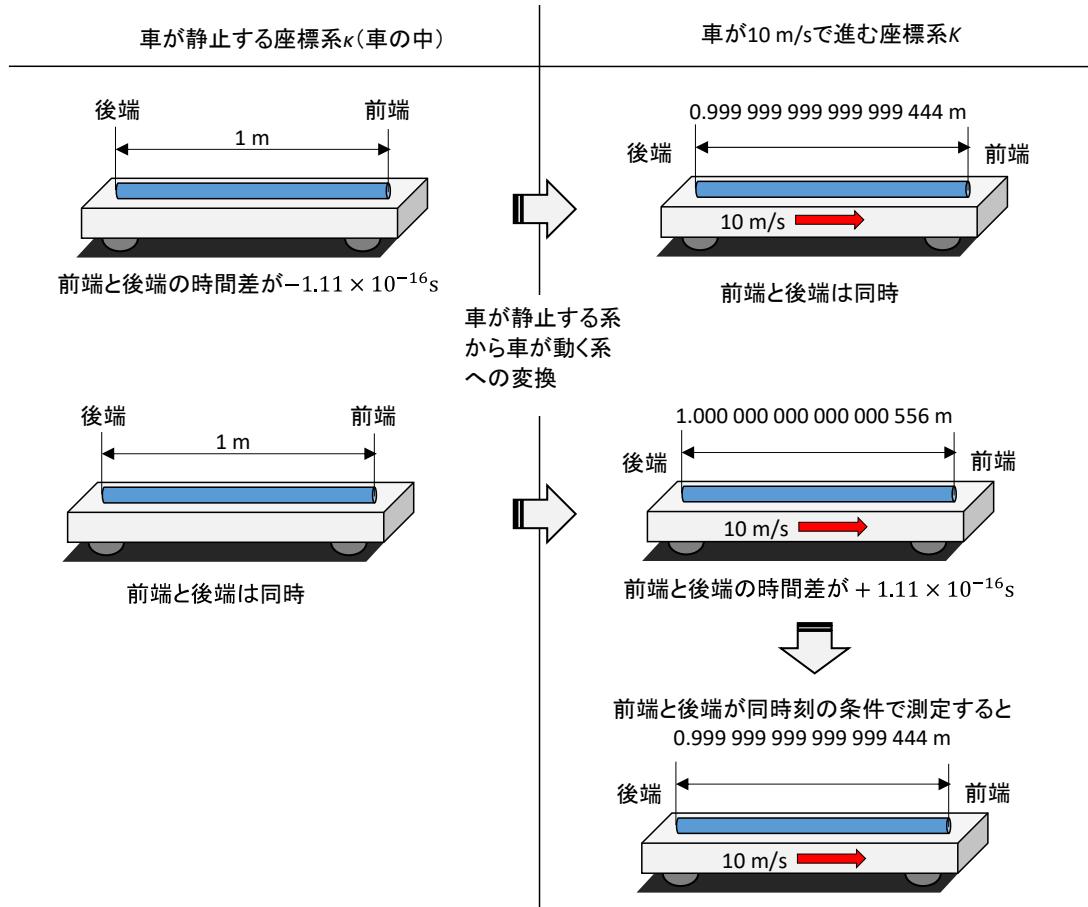


Fig.A.1.1 動く棒の相対論効果.

ば,

$$\begin{pmatrix} \tau \\ l \end{pmatrix} = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} -v/c^2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Eq.A.1.3.}$$

よって,

$$L = \sqrt{1 - v^2/c^2} l \cong \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) l \quad \text{Eq.A.1.4,}$$

$$\tau = -\frac{v}{c^2} l \quad \text{Eq.A.1.5.}$$

Eq.A.1.4 から、スプリンターと同じ速度 $v = 10 \text{ ms}^{-1}$ で走っている車の中の $l = 1 \text{ m}$ の棒は、陸上競技場が静止する座標系 K では、

$$L \cong (1 - (v^2/(2c^2)))l \cong 1 - (5.56 \times 10^{-16}) = 0.999\,999\,999\,999\,999\,444 \text{ m}$$

に収縮する(いわゆるローレンツ収縮). ここで注意しなければいけないのは、前端と後端の時間差 $\tau = -(v/c^2)l = -1.11 \times 10^{-16} \text{ s}$ の 1 m の棒は、 $1 - (5.56 \times 10^{-16}) \text{ m}$ に収縮するが、両端が同時の 1 m の棒は、前端と後端の時間差が $1.11 \times 10^{-16} \text{ s}$ の $1 + (5.56 \times 10^{-16}) \text{ m}$ に拡張することである(Fig.A.1.1). 座標系 K での同時刻を前提として距離を比較することは偏った(対等でない. シンメトリーでない) 比較 であり、長さに関しては双子のパラドックス(弟からみた兄の物差しは短く、兄からみた弟の物差しも短い) が生じるように誤解される.

補足 1: メートル原器の伸縮

相対論効果により棒が伸縮することはメートル原器も伸縮することを意味するので、メートル原器を長さの標準とすると測定する長さは不変になる。しかし、光速を一定として光の到達に要する時間で距離の標準を定めると Eq.3.5 で示したように時間と同じ割合で距離も収縮することになる。二つの異なる時計で時間の進み方が異なることは測定でも確認されているが、同じメートル原器の長さが異なることには違和感がある。相対性理論は光の速度 $c = \text{距離}/\text{時間}t$ が一定であることを出発点としている。しかし、 l が一定で c と t が変化することを出発点として理論を構築することも考えられる。Eq.2.1 で伸縮するのは時間のみとすると、

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ \sqrt{1 - v^2/c^2} & \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad \text{Eq.A.1.6.}$$

光の位置 $x = ct$ は、

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ \sqrt{1 - v^2/c^2} & \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ c - v & 1 \end{pmatrix} t \quad \text{Eq.A.1.7.}$$

に変換されるので、座標系 k での光速 c_k は、

$$c_k = \frac{\xi}{\tau} = \sqrt{1 - v^2/c^2} c \quad \text{Eq.A.1.8.}$$

として理論を再構築できるような気がする。理論を再構築するためには距離と時間の定義、および光速が一定であることの根拠となった実験を熟考することが必要であろう。

重力で光の速度が遅くなること、および 0 になることで重力レンズ効果、およびブラックホールから光が出られなくなる現象が生じると説明できればわかりやすい。

付録. 2 重力による相対論効果

(1) スカイツリー

スカイツリーの 1 階での時間 τ_{0m} と展望台(高低差 $h = 450 \text{ m}$)での時間 t_{450m} が重力の影響で異なる相対論効果は Fig.A.2.1 のように考えて計算できる。「展望台が静止する座標系 K (時間 t , 位置 x)」と「展望台から重力加速度 $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ で自由落下(free fall)して 1 階の位置で自由落下の速度が v_{fall} となった座標系 K' (時間 t' , 位置 x')」では時間は一致する。また, 1 階が静止する座標系 κ は, 座標系 K' に対して速度 $-v_{\text{fall}}$ で移動するとみなせる。よって, Eq.2.3 と同様して,

$$\tau_{0m} \cong \left(1 - \frac{1}{2} v^2 / c^2\right) t_{450m} \quad \text{Eq.A.2.1}$$

で計算する。 $v_{\text{fall}} = (2gh)^{0.5}$ より

$$\tau_{0m} \cong t_{450m} - \frac{(-v_{\text{fall}})^2}{2c^2} t_{450m} = t_{450m} - \frac{gh}{c^2} t_{450m} \quad \text{Eq.A.2.2.}$$

結果的に重力ポテンシャルでの計算（例えば[1]）と整合する。31 日間（1 ヶ月）に相当する $t_{450m} = 2.7 \times 10^6 \text{ s}$ での展望台と 1 階の時間差は $t_{450m} - \tau_{0m} \cong gh c^{-2} t_{450m} \cong 1.3 \times 10^{-7} \text{ s}$ 。この計算値は光格子時計の実験における計算値のマスコミ報道[3]と一致する。

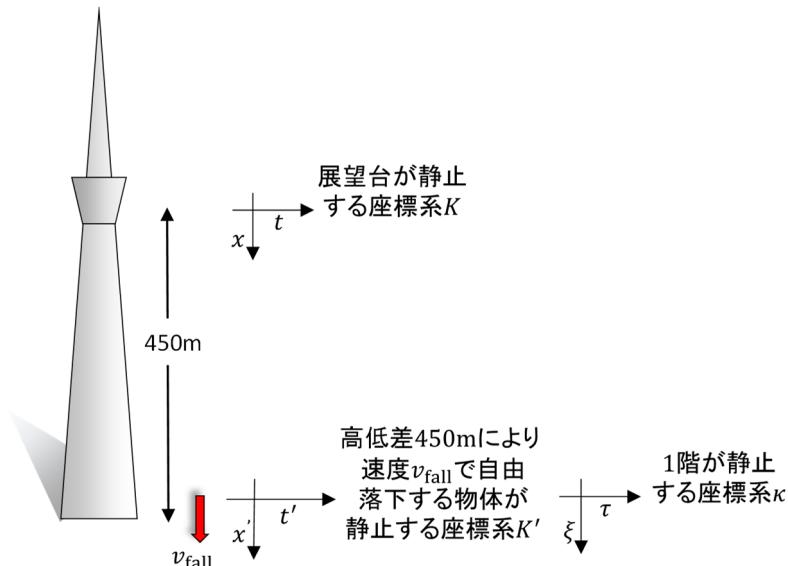


Fig.A.2.1 重力による相対論効果の考え方.

(2) GPS 衛星

同様にして地上での時間 T に対する GPS 衛星(米国)での時間 T_{GPS} の進む割合 $(T_{\text{GPS}} - T)/T = \Delta T/T$ を GPS 衛星の公転速度による進み $\Delta T_V/T$ (遅れるので負の値) と地球の重力による進み $\Delta T_G/T$ の和

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_V}{T} + \frac{\Delta T_G}{T} \quad \text{Eq.A.2.3}$$

として計算する。地球の自転速度を考慮すると計算が複雑になること、および地球の自転速度は衛星の公転速度よりも十分に小さいことから地球の自転速度は見込まない。また、 ΔT は十分に小さいので $\Delta T/T \cong \Delta T/T_{\text{GPS}}$ とみなす。

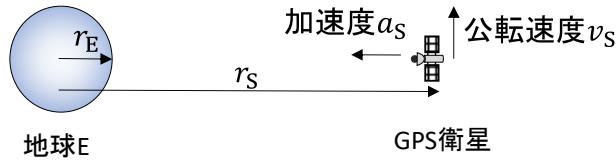


Fig.A.2.2 GPS衛星の模式図。

a) GPS衛星の公転速度による時計の進み $\Delta T_V/T$

質量 M_S の衛星 S が半径 R_S 、速度 v_S で質量 M_E の地球に対して公転しているとき（Fig.A.2.2）、万有引力定数を G とした重力 $F = GM_E M_S R_S^{-2}$ 、質量 M_S 、および加速度 $a_S = v_S^2 R_S^{-1}$ の運動方程式は、

$$GM_E M_S R_S^{-2} = M_S v_S^2 R_S^{-1} \quad \text{Eq.A.2.4.}$$

Eq.2.3 で $t_{\text{field}} = T$, $\tau_{\text{runner}} - t_{\text{field}} = \Delta T_V$, および $v = v_S$ とすると $\Delta T_V/T \cong -v_S^2/(2c^2)$ となるので v_S を Eq.A.2.4 で置き換えると、

$$\frac{\Delta T_V}{T} \cong -\frac{GM_E}{2c^2 R_S} \cong -0.83 \times 10^{-10}$$

ここで、 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$, $M_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$, および $R_S = 2.66 \times 10^7 \text{ m}$ とした。

b) 地球の重力による時計の進み $\Delta T_G/T$

地球からの距離 x にある質量 m の物体に作用する重力 $F = -GM_E mx^{-2}$ が、衛星の公転半径 R_S から地球の半径 R_E の位置まで自由落下する物体に作用する仕事量 $\int F dx$ は落下速度 v_{fall} の運動エネルギーと等しくなるので、

$$\int_{R_S}^{R_E} -GM_E mx^{-2} dx = \frac{1}{2} mv_{\text{fall}}^2 \quad \text{Eq.A.2.5.}$$

スカイツリーでの計算と同様に考え、Eq.A.2.1 で $t_{450m} = T_{\text{GPS}}$, $\tau_{0m} = T$, および $v^2 = v_{\text{fall}}^2$ とすると、 $(T_{\text{GPS}} - T)/T_{\text{GPS}} \cong v_{\text{fall}}^2/(2c^2)$ 。左辺の $(T_{\text{GPS}} - T)/T_{\text{GPS}} \cong \Delta T_G/T$ とし、右辺の v_{fall} を Eq.A.5 で置き換え積分すると、

$$\frac{\Delta T_G}{T} \cong \frac{GM_E}{c^2} \left(-\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_E} \right) \cong 5.28 \times 10^{-10}$$
Eq.A.2.6.

ここで, $R_E = 6.37 \times 10^6$ mとした.

c) GPS衛星での時計の進み

以上より, GPS衛星での時計の進みは

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_V}{T} + \frac{\Delta T_G}{T} = (-0.83 \times 10^{-10}) + (5.28 \times 10^{-10}) = 4.45 \times 10^{-10}$$
Eq.A.2.7

となり, 衛星から周波数 f で送信した電波の周波数の増加 Δf は $\Delta f/f = -4.45 \times 10^{-10}$ となる (周波数は時間の逆数なので正負が反転). 解説書[4]では上記と同様な簡易な計算で $\Delta f/f = -4.464 \times 10^{-10}$ としており, Eq.A.2.7 の計算値は整合する. また, 文献[5]に記載された GPS衛星 NTS-2 での時間の進みの計算値 445.0×10^{-12} , および測定値 442.5×10^{-12} ともよく整合する. 文献[5]には GPS衛星の信号の周波数のずれ (offset) を相対論効果の補正で縮小した旨が記載されている.

補足 1: 大気と自転がない星の地上すれすれの位置を公転する衛星の場合

Eq.A.2.6 より, 大気がない星の地上すれすれの位置 $R_S \cong R_E$ を公転する衛星の場合には重力による進み $\Delta T_G/T \cong 0$ となり, この星の自転がなければ, $\Delta T/T \cong \Delta T_V/T \cong -GM_E/(2c^2 R_E)$ となり, 衛星の時計のずれは公転速度による遅れ

$$\Delta T \cong \Delta T_V \cong -\frac{GM_E}{2c^2 R_E} T$$
Eq.A.2.8

のみとなる. 衛星の時計の遅れ $-\Delta T$ は経過時間 T に比例して増える.

References

- [1] 石井俊全: 一般相対性理論を一步一歩数式で理解する, ベレ出版.
- [2] A. Einstein: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik, **17**, 891 (1905) [in German]. (web site で英訳を入手).
- [3] NHK: 展望台の時計 地上より早く進む? スカイツリーで実験, 2018.10.03.
- [4] B.ホフマン-ウェレンホフ, H.リヒテネガー, J.コリンズ, 西修二郎(訳):GPS理論と応用, 丸善出版.
- [5] James A. Buisson, Roger L. Easton, Thomas B. McCaskill; INITIAL RESULTS OF THE NAVSTAR GPS NTS-2 SATELLITE, Proceedings of the 9th Annual Precise Time and Time Interval Applications and Planning Meeting, 177–199, 1977. (web site で入手).

Refutation of the twin paradox by considering expansion in Lorentz transformation

ローレンツ変換での拡張を考慮した
双子のパラドックスの反駁

Hiroshi Yoshinaga

Tsukuba-shi, Ibaraki 305-0024, Japan

E-mail: 01@a.nifty.jp, web site: yoshi-naga.jp

Numerous attempts have been made to refute the twin paradox associated with Einstein's special theory of relativity. However, none of these, including Einstein's answer, have made the essential puzzle clear; namely, 'the Earth's clock would either lose time or not lose time, if we assume that the rocket is stationary and the Earth moves.' The following claim is discussed in this paper: although the moving Earth's clock would lose time at the same rate, the time course would be equal to the time course which we would assume if the Earth were stationary, because **the distance traveled by the moving Earth would be extended by Lorentz transformation if we assume the rocket to be stationary.** In the end, the relativity not only of the clock speed but of the travel distance must be considered in Lorentz transformation. By considering the expansion of time and length in Lorentz transformation that everyone overlooked, the twin paradox is easily resolved. It is described using simple equations and simple case studies.

インシュタインの特殊相対性理論にかかる双子のパラドックスに対する反駁は数多くある。しかし、「ロケットが静止し地球が動く仮定すると地球の時計が遅れるか否か。」という本質的な問にはインシュタイン自身も答えていない。この論文では、**ロケットが静止していると仮定すると動く地球の時計も同じ割合で遅れるが、動く地球が移動する距離はローレンツ変換によって拡大される**ので、地球が静止すると仮定した場合と時間経過が同じになるについて述べる。すなわち、時計の速度だけでなく移動距離の相対性もローレンツ変換で考慮する必要がある。誰もが見落としていたローレンツ変換での時間と長さの拡張を考えると、双子のパラドックスは簡単に解消できる。以上を簡素な式と簡素なケーススタディで説明した。

Keywords: twin paradox, clock paradox, theory of relativity, special relativity, Lorentz transformation, inertial frame, relativity of length, relativity of clock speed, relativity of time course, Lorentz expansion

1. Introduction

Numerous attempts have been made to refute the twin paradox associated with Einstein's special theory of relativity¹⁾. However, none of these, including Einstein's answer²⁾, have made the essential puzzle clear; namely, 'the Earth's clock would either lose time or not lose time, if we assume that the rocket is stationary and the Earth moves.' The following claim is discussed in this paper: although the moving Earth's clock would lose time at the same rate, the time course would be equal to the time course which we would assume if the Earth were stationary, because **the distance traveled by the moving Earth would be extended by Lorentz transformation if we assume the rocket to be stationary** (see Fig. 1.). In the end, the relativity not only of the clock speed but of the travel distance must be considered in Lorentz transformation. **By considering the expansion of time and length in Lorentz transformation that everyone overlooked, the twin paradox is easily resolved.**

1. はじめに

アインシュタインの特殊相対性理論¹⁾にかかる双子のパラドックスに対する反駁は数多くある。しかし、「ロケットが静止し地球が動く仮定すると地球の時計が遅れるか否か。」という本質的な問にはアインシュタイン自身も答えていない²⁾。この論文では、ロケットが静止していると仮定すると動く地球の時計も同じ割合で遅れるが、動く地球が移動する距離がローレンツ変換によって拡大される（Fig.1 参照）ので、地球が静止すると仮定した場合と時間経過が同じになることについて述べる。すなわち、時計の速度だけでなく移動距離の相対性もローレンツ変換で考慮する必要がある。**ローレンツ変換における時間と長さの拡張（誰もが見落としていた。）を考慮すると、双子のパラドックスは簡単に解消できる。**

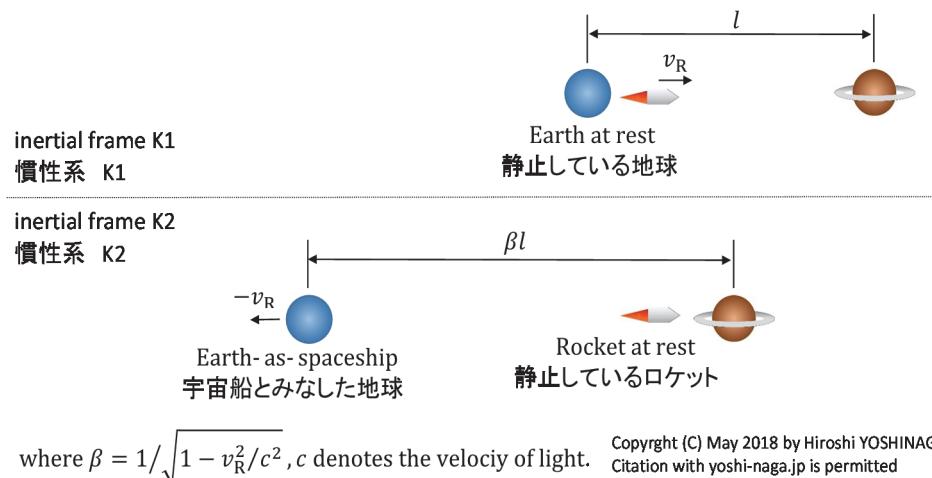


Fig. 1. Expansion of distance by converting the inertial frame K1 where the earth is stationary into the inertial frame K2 where the rocket is stationary by Lorentz transformation (schematic figure).

Fig. 1. 地球が静止している慣性系 K1 をロケットが静止している慣性系 K2 にローレンツ変換することによる距離の拡張(模式図)。

It is described using simple equations and simple case studies in this paper. **The effects of acceleration and gravity are not considered.** To understand the essentials of the special theory of relativity, they are not needed, **because as the travel distance becomes long, these effects become relatively small.** There are explanations in books and web sites that the time of the Earth-as-spacecraft (or the twin's clock stayed at the Earth) would go discontinuously at turning points of round trips if we assume the rocket to be stationary, however, the time discontinuity comes from the wrong turning points mistakenly shortened.

本論文では簡素な式と簡素なケーススタディで説明する。加速と重力の影響は考慮していない。移動距離が長くなれば、これらの影響は相対的に小さくなるので、特殊相対性理論の本質を理解するためには必要ない。ロケットが止まっていると仮定すると Earth-as-spacecraft (宇宙船地球号) の時間 (または、地球に残った双子の時計) が、往復旅行の折り返し点で不連続に進む旨の説明が書籍、および web site に見受けられるが、時間が不連続になる原因は、間違って短くした折り返し点に起因する。

2. Presuppositions, etc.

The presuppositions, etc., in this paper are as follows.

- 1) ‘Lorentz transformation’ is the transformation of coordinates and times from one inertial frame system to another, in Einstein’s special theory of relativity. ‘Galilean transformation’ is also described, to differentiate it from Lorentz transformation.
- 2) Only one direction, x , among the three dimensions of x, y, z , is selected to describe locations. The time t and location x of a point P_i is described as (t, x) or $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$.
- 3) The difference between P_i , and P_j (where i and j are indices denoting individual points) is described as $\Delta P = P_i - P_j = (\Delta t, \Delta x)$, where **Δt and Δx denote the time course and difference in location**, respectively.
- 4) **Galilean and Lorentz transformations are applied to ΔP .** It should be noted that the equations in the special theory of relativity are modified in this paper; however, the essential import of the equations is not changed.
- 5) ‘Motion of the Earth’ denotes neither the Earth’s orbital rotation around the sun, nor its axial rotation, but rather, extremely high speed uniform linear motion, as is relevant to the special theory of relativity.

2. 前提条件等

本論文では以下を前提条件等とした.

- 1) 「ローレンツ変換」は、AINシュタインの特殊相対性理論における、ある慣性系から別の慣性系への座標と時間の変換である。ローレンツ変換との違いを示すために「ガリレイ変換」も併記した。
- 2) 位置を示す座標は x, y, z の3つの次元のうちの x のみとした。点 P_i の時間 t および位置 x は (t, x) または $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ と表記した。
- 3) P_i と P_j の差(i と j は個々の点を示すインデックス)は、 $\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j = (\Delta\mathbf{t}, \Delta\mathbf{x})$ とした。ここで $\Delta\mathbf{t}$ および $\Delta\mathbf{x}$ は、時間経過および位置の差。
- 4) ガリレイ変換とローレンツ変換で $\Delta\mathbf{P}$ を変換する。この論文では、特殊相対性理論の式を書き換えているが、式の本質的な意味は変わらない。
- 5) 「地球の動き」は、太陽の周りの公転や自転ではなく、特殊相対性理論にかかるような非常に高速かつ一定の線形運動を意味する。

3. Galilean Transformation and Lorentz Transformation

First, Galilean and Lorentz transformation will be distinguished. The equations which transform $(\Delta t_{K1}, \Delta x_{K1})$ in inertial frame K1 to $(\Delta t_{K2}, \Delta x_{K2})$ in inertial frame K2, which moves at the constant velocity v_C , in the direction of increasing x_{K1} in K1, are:

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K2_G} \\ \Delta x_{K2_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (1),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K2_L} \\ \Delta x_{K2_L} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & -v_C/c^2 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (2),$$

$$\beta = 1/\sqrt{1 - v_C^2/c^2} \quad (3),$$

where c denotes the velocity of light. The subscripts “_G”, and “_L” denote Galilean and Lorentz transformation, respectively.

Since $(\Delta t_{K1}, 0)$ is a stationary point in K1, $\Delta x_{K2}/\Delta t_{K2}$ obtained by substituting $(\Delta t_{K1}, 0)$ into **Eqs. (1)** and **(2)** are the velocities of K1 in K2. The velocity is equal to $-v_C$ in both transformations. The equations of transformations from K2 to inertial frame K3, which move at the constant velocity $-v_C$, in the direction of increasing x_{K2} in K2, are:

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3_G} \\ \Delta x_{K3_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K2_G} \\ \Delta x_{K2_G} \end{pmatrix} \quad (4),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3_L} \\ \Delta x_{K3_L} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & +v_C/c^2 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K2_L} \\ \Delta x_{K2_L} \end{pmatrix} \quad (5).$$

The matrices in **Eq. (1)** vs. **Eq. (4)** and **Eq. (2)** vs. **Eq. (5)** are the inverse of each other, as:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (6),$$

$$\beta \begin{pmatrix} 1 & +v_C/c^2 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} = \left[\beta \begin{pmatrix} 1 & -v_C/c^2 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (7).$$

Thus, we obtain **Eq. (8)** from **Eqs. (1), (4)**, and **(6)**. Furthermore we obtain **Eq. (9)** from **Eqs. (2), (5)**, and **(7)**:

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3_G} \\ \Delta x_{K3_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (8),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3_L} \\ \Delta x_{K3_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (9).$$

Eq. (9) implies a refutation of the twin paradox, as illustrated by several case studies in §4.

In addition, the changing rate of the clock speed obtained by dividing **Eq. (2)** by Δt_{K1} is:

$$\frac{\Delta t_{K2_L}}{\Delta t_{K1}} = \beta \left(1 - v_C/c^2 \frac{\Delta x_{K1}}{\Delta t_{K1}} \right) \quad (10).$$

Eq. (10) varies as a function of v_C and $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$, which denotes the velocity of an object moving in K1. If $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$ in **Eq. (10)** equals v_C , **Eq. (11)**, expressing the delay in the traveler's clock, is obtained;

$$\frac{\Delta t_{K2_L}}{\Delta t_{K1}} = 1/\beta \quad (11),$$

whereas, if $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$ in **Eq. (10)** equals 0, which denotes a stationary point in K1, **Eq. (12)**, expressing the expansion of the time course in Lorentz transformation, is obtained;

$$\frac{\Delta t_{K2_L}}{\Delta t_{K1}} = \beta \quad (12).$$

3. ガリレイ変換とローレンツ変換

まず、ガリレイ変換とローレンツ変換の違いを示す。慣性系 K1 の $(\Delta t_{K1}, \Delta x_{K1})$ を K1 の x_{K1} の正方向に一定速度 v_C で移動する慣性系 K2 の $(\Delta t_{K2}, \Delta x_{K2})$ に変換する式は、

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K2_G} \\ \Delta x_{K2_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (1),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K2_L} \\ \Delta x_{K2_L} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & -v_C/c^2 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (2),$$

$$\beta = 1/\sqrt{1 - v_C^2/c^2} \quad (3),$$

ここで、 c は光の速度を示す。添え字の「_G」および「_L」は、それぞれガリレイ変換およびローレンツ変換を示す。

$(\Delta t_{K1}, 0)$ は $K1$ の静止点なので、 $(\Delta t_{K1}, 0)$ を式(1)、および(2)に代入して得られる $\Delta x_{K2}/\Delta t_{K2}$ は $K2$ における $K1$ の速度である。速度は両変換で $-v_C$ となり等しい。 $K2$ から $K2$ の x_{K2} の正方向に一定速度 $-v_C$ で移動する慣性系 $K3$ への変換の式は、

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3_G} \\ \Delta x_{K3_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K2_G} \\ \Delta x_{K2_G} \end{pmatrix} \quad (4),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3_L} \\ \Delta x_{K3_L} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & +v_C/c^2 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K2_L} \\ \Delta x_{K2_L} \end{pmatrix} \quad (5).$$

Eq. (1) と **Eq. (4)**、および **Eq. (2)** と **Eq. (5)** の行列は互いに次のように逆行列である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (6),$$

$$\beta \begin{pmatrix} 1 & +v_C/c^2 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} = \left[\beta \begin{pmatrix} 1 & -v_C/c^2 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (7).$$

よって、**Eqs. (1), (4)**、および **(6)** から **Eq. (8)** が得られる。さらに、**Eqs. (2), (5)**、および **(7)** から **Eq. (9)** が得られる。

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3_G} \\ \Delta x_{K3_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (8),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3_L} \\ \Delta x_{K3_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (9).$$

Eq. (9) は、§4 のケーススタディで示すように双子のパラドックスに対する反駁を意味する。

補足しておくが、**Eq. (2)** を Δt_{K1} で割ることにより得られる時計の速さの変換率は、

$$\frac{\Delta t_{K2_L}}{\Delta t_{K1}} = \beta \left(1 - v_C/c^2 \frac{\Delta x_{K1}}{\Delta t_{K1}} \right) \quad (10).$$

Eq. (10) は v_C と $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$ の関数である。 $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$ は $K1$ で移動する物体の速度を表す。**Eq. (10)** の $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$ が v_C なら、旅行者の時計の遅れを表す **Eq. (11)** が得られる。

$$\frac{\Delta t_{K2_L}}{\Delta t_{K1}} = 1/\beta \quad (11),$$

一方、**Eq. (10)** の $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$ が、 $K1$ での静止点を意味する 0 なら、ローレンツ変換による時間経過の拡張を表す **Eq. (12)** が得られる。

$$\frac{\Delta t_{K2_L}}{\Delta t_{K1}} = \beta \quad (12).$$

4. Case Studies

4.1 Outline

As aforementioned, **Eq. (9)** implies a refutation of the twin paradox. To illustrate this, several

case studies, which assume the velocity $v_C = \pm c/2$ in Lorentz transformation, will be discussed. Space travel at $c/2$ may never actually be possible, however, the velocity is reasonable for the purpose, because here the difference from Galilean transformation is obvious and moderate. The principle of the constancy of the velocity of light, and the relativity of simultaneity, of length, and of time course will first be discussed, before discussing the time course during virtual space travel and refutation of the twin paradox. In the case studies, the units of length and time are meter and second. The β in Eq. (3) is $\beta = 1/\sqrt{0.75} \cong 1.15$, and $1/\beta \cong 0.86$.

4. ケーススタディ

4.1 概要

前述したように, Eq. (9) は双子のパラドックスに対する反駁を意味する。このことを説明するために, ローレンツ変換で速度 $v_C = \pm c/2$ を仮定するケーススタディについていくつか述べる。現実には $c/2$ での宇宙旅行は実現不可能かもしれないが, ガリレイ変換との違いが明らかで程よいので, 説明に適している。仮想的な宇宙旅行での時間経過と双子のパラドックスに対する反駁について述べる前に, まず, 光速度の不変の原理, ならびに同時性, 長さ, および時間経過の相対性について述べる。ケーススタディでは, 長さと時間の単位はメートルと秒とする。Eq. (3) の β は, $\beta = 1/\sqrt{0.75} \cong 1.15$ と $1/\beta \cong 0.86$ になる。

Some transformed cases of $\Delta P_{i,j}$ are shown in **Table I**. The $\Delta P_{i,j}$ are transformed from K1 to K2, and then transformed from K2 to K3, at the relative velocity v_C . The positive/negative values of v_C for $\Delta P_{6,5}$ are the inverse of those for $\Delta P_{5,0}$, because the return trip of $\Delta P_{5,0}$ is assumed in $\Delta P_{6,5}$. The $\sum \Delta P$ is the sum of $\Delta P_{5,0}$, and $\Delta P_{6,5}$. The meanings of these transformations are explained in §4.2-4.4.

$\Delta P_{i,j}$ のいくつかの変換事例を **Table I** に示す。 $\Delta P_{i,j}$ は K1 から K2, そして K2 から K3 に速度 v_C で変換している。 $\Delta P_{6,5}$ では, $\Delta P_{5,0}$ の帰路を仮定しているので, v_C の正負が $\Delta P_{5,0}$ と逆である。 $\sum \Delta P$ は $\Delta P_{5,0}$ と $\Delta P_{6,5}$ を合計したものである。これらの変換の意味は §4.2-4.4 で説明する。

Table I. Galilean and Lorentz transformations of ΔP (Time course, Difference in location).Table I. ΔP (時間経過, 位置の差) のガリレイ変換とローレンツ変換.

$\Delta P_{i,j}$ or $\Sigma \Delta P$	K1	Transformation from K1 to K2 with velocity v_c			Transformation from K2 to K3 with velocity v_c		
		v_c	K2_G Galilean	K2_L Lorentz	v_c	K3_G Galilean	K3_L Lorentz
$\Delta P_{0,0} = P_0 - P_0$	(0,0)	$+c/2$	(0,0)	(0,0)	$-c/2$	(0,0)	(0,0)
$\Delta P_{1,0} = P_1 - P_0$	(1, c)		(1, 0.5c)	(0.58, 0.58c)		(1, c)	(1, c)
$\Delta P_{2,0} = P_2 - P_0$	(1, -c)		(1, -1.5c)	(1.73, -1.73c)		(1, -c)	(1, -c)
$\Delta P_{3,0} = P_3 - P_0$	(0, c)		(0, c)	(-0.58, 1.15c)		(0, c)	(0, c)
$\Delta P_{4,0} = P_4 - P_0$	(2, 0)		(2, -c)	(2.31, -1.15c)		(2, 0)	(2, 0)
$\Delta P_{5,0} = P_5 - P_0$	$t_{\text{trp}}(2, c)$		$t_{\text{trp}}(2, 0)$	$t_{\text{trp}}(1.73, 0)$		$t_{\text{trp}}(2, c)$	$t_{\text{trp}}(2, c)$
$\Delta P_{6,5} = P_6 - P_5$	$t_{\text{trp}}(2, -c)$	$-c/2$	$t_{\text{trp}}(2, 0)$	$t_{\text{trp}}(1.73, 0)$	$+c/2$	$t_{\text{trp}}(2, -c)$	$t_{\text{trp}}(2, -c)$
$\Sigma \Delta P$ $= \Delta P_{5,0} + \Delta P_{6,5}$	$t_{\text{trp}}(4, 0)$	-	$t_{\text{trp}}(4, 0)$	$t_{\text{trp}}(3.46, 0)$	-	$t_{\text{trp}}(4, 0)$	$t_{\text{trp}}(4, 0)$

4.2 Principle of the constancy of the velocity of light

The $\Delta P_{1,0}$ in **Table I** means that the velocity of light in K1 is $+c$. Though the velocity in K2_G is changed to $0.5c$, the velocity in K2_L is $0.58c/0.58 = c$. The $\Delta P_{2,0}$ means that the velocity of light in K1 is $-c$. Though the velocity in K2_G is changed to $-1.5c$, the velocity in K2_L is $-1.73c/1.73 = -c$. K3 transformed from both K2_G and K2_L accords with the original K1. The above is represented in **Fig. 2**, where the horizontal and vertical axes represent the time and location, respectively, and the positive and negative velocities of light, c and $-c$, are represented by solid arrows and dotted arrows, respectively. The graphs of K1, K2, and K3 are arranged left to right, with the Galilean and Lorentz transformations on the top and bottom, respectively. Though the slopes of the arrows representing the velocity of light change in K2_G, they do not change in K2_L.

4.2 光速度不変の原理

Table I の $\Delta P_{1,0}$ は K1 での光速が $+c$ であることを意味する. K2_G での光速は $0.5c$ に変わるが, K2_L での光速は $0.58c/0.58 = c$ である. $\Delta P_{2,0}$ は K1 での光速が $-c$ であることを意味する. K2_G での光速は $-1.5c$ に変わるが, K2_L での光速は $-1.73c/1.73 = -c$ である. K2_G と K2_L から変換された K3 は, ともに元の K1 と一致する. 以上を **Fig. 2** に示す. 水平軸および垂直軸はそれぞれ時間および位置を表し, 光の正負の速度 c および $-c$ は, それぞれ実線および虚線で示される.

び点線の矢印で示した。K1, K2, および K3 のグラフは左から右の順に配置し、ガリレイ変換とローレンツ変換はそれぞれ上側および下側に配置した。光の速度に相当する矢印の傾きは K2_G では変化するが K2_L では変化しない。

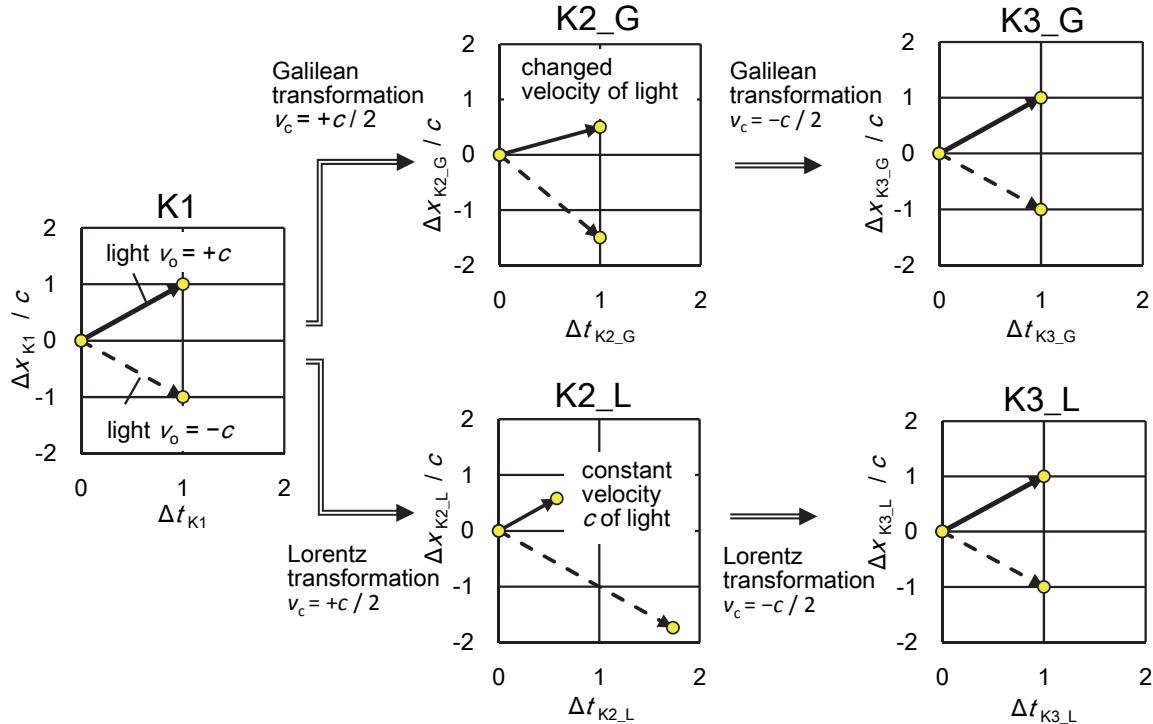


Fig. 2. Transformed time and location of light.

Fig. 2. 光の時間と位置の変換。

4.3 Relativity of simultaneity, length and time course

The $\Delta P_{3,0}$ values in **Table I** show that 0 sec (as simultaneity) and length of c m in K1 are transformed to -0.58 s and $1.15c$ m in K2_L, while these changes do not occur in K2_G. The $\Delta P_{4,0}$ values in **Table I** show the time course of a stationary point in K1, with 2 s in K1 changing to 2.31 s in K2_L.

4.3 同時、長さ、および時間経過の相対性

Table I の $\Delta P_{3,0}$ は、K1 における 0 秒 (すなわち同時) で長さ c m が K2_L では -0.58 秒と $1.15c$ m に変換されることを示す。このような変化は K2_G では起こらない。**Table I** の $\Delta P_{4,0}$ は、K1 での静止点の 2 秒が K2_L では 2.31 秒に変換されることを示す。

4.4 Time course during virtual space travel

Here we consider a virtual round-trip space journey by a rocket from Earth to Planet A,

located $l = t_{\text{trp}} \cdot c$ away from the Earth, at the velocity $v_R = c/2$. If v_C , which is the velocity of the inertial frame K2 in K1, equals v_R , the rocket is stationary in K2. The effects of acceleration and gravity are not considered. To understand the essentials of the special theory of relativity, they are not needed, because as the distance becomes long, these effects become relatively small.

The $\Delta P_{5,0}$ in **Table I** indicates the outward journey. The time course in K1 is $2t_{\text{trp}}$, while the time course in K2_L, which means the time course in the rocket, is reduced to $2t_{\text{trp}}/\beta = 1.73t_{\text{trp}}$. This change does not occur in K2_G. However, the $1.73t_{\text{trp}}$ in K2_L is recovered to $2t_{\text{trp}}$ in K3. The time courses in K1 and K3 mean the time course of the clock in the Earth at rest and the time courses of the clock in the Earth-as-spaceship. $\Delta P_{6,5}$ means the return journey with the velocity $v_R = -c/2$. Here, the $2t_{\text{trp}}$ in K1 is also reduced, to $1.73t_{\text{trp}}$ in K3_L. The time $\Sigma \Delta P$ in **Table I** means the time course over the round-trip. The time courses in K1, K2_G, and K3 are $4t_{\text{trp}}$, while the time course in K2_L is reduced to $4t_{\text{trp}}/\beta = 3.46t_{\text{trp}}$. The above is represented in **Fig. 3**, with the location of the rocket represented by the vertical axis and the time represented by the horizontal axis. The rocket is at rest in both K2_G and K2_L. Though the time course in K2_L is reduced, it is recovered in K3.

4.4 仮想的な宇宙旅行での時間経過

ここでは、地球からの距離が $l = t_{\text{trp}} \cdot c$ の惑星 A への速度 $v_R = c/2$ のロケットによる仮想的な往復の宇宙旅行を考察する。慣性系 K1 での慣性系 K2 の速度 v_C が v_R に等しい場合、ロケットは K2 で静止している。加速と重力の影響は考慮しない。距離が長くなるにつれてこれらの影響は相対的に小さくなるため、特殊相対性理論の本質を理解するためには必要ない。

Table I の $\Delta P_{5,0}$ は往路を示す。K1 での時間経過は $2t_{\text{trp}}$ であり、ロケットでの時間経過を意味する K2_L での時間経過は $2t_{\text{trp}}/\beta = 1.73t_{\text{trp}}$ に減少する。このような変化は K2_G では起こらない。しかし、K2_L での $1.73t_{\text{trp}}$ は K3 では $2t_{\text{trp}}$ に戻る。K1 および K3 での時間経過は、静止した地球での時間経過、および Earth-as-spaceship 内での時間経過を意味する。 $\Delta P_{6,5}$ は速度 $v_R = -c/2$ での復路を意味する。ここでも K1 での $2t_{\text{trp}}$ は $1.73t_{\text{trp}}$ に減少する。**Table I** の $\Sigma \Delta P$ の時間は往復旅行での時間経過を意味する。K1, K2_G, および K3 での時間経過は $4t_{\text{trp}}$ であるが、K2_L では $4t_{\text{trp}}/\beta = 3.46t_{\text{trp}}$ に減少する。以上についてロケットの位置を横軸、時間を縦軸とした **Fig. 3** に示す。K2_G および K2_L ではロケットは静止している。K2_L では時間経過が減少するが、K3 では元に戻る。

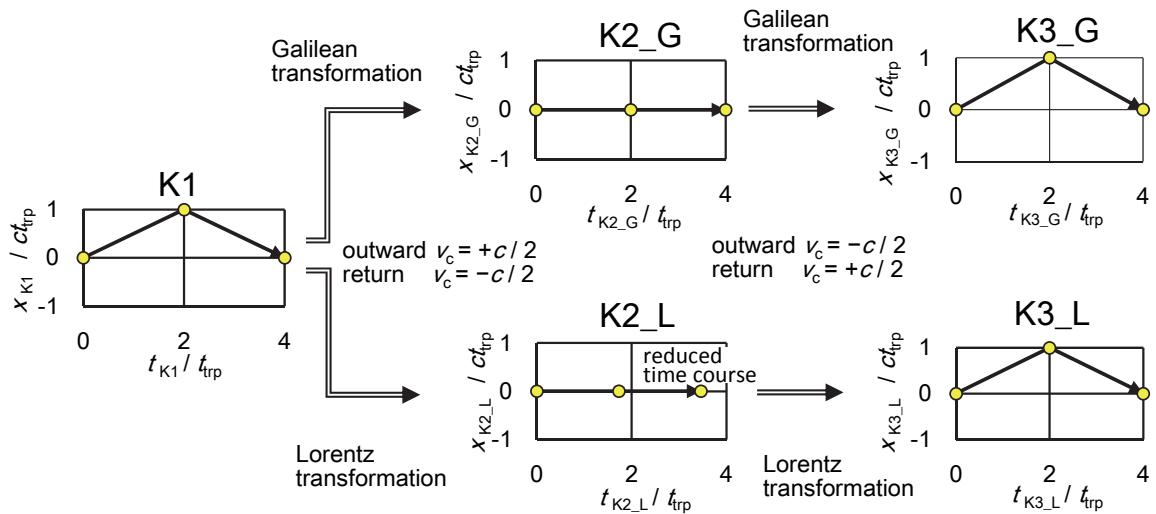


Fig. 3. Space travel at $1/2$ the velocity of light.

Fig. 3. 光速の $1/2$ の速度での宇宙旅行.

4.5 Refutation of the twin paradox

A fundamental refutation of the twin paradox will now be discussed, based on the case studies in §4.1 and 4.4. The schematic in **Fig. 4** shows the Earth as the point of departure, Planet A as the turning point, and the rocket in flight. Only the outward journey is represented in **Fig. 4**, because the return is similar to this as described in §4.4. The horizontal and vertical axes represent the time and location, respectively. Lorentz transformation with velocity v_c is abbreviated to $L(v_c)$.

In the inertial frame system K1 (left in **Fig. 4**), the Earth is stationary. K1 is transformed to the inertial frame system K2 by $L(c/2)$ (right). We can assume, in K2, that the Earth-as-spacecraft is launched in the opposite direction to Planet A, with velocity $v_E = -c/2$. K2 is transformed to K3 by $L(-c/2)$. K3 matches K1(left), because contractions and expansions return completely by the transformation with the positive / negative inverse velocity. **The essence of the twin paradox refutation lies in the difference between the rocket in K1 and the Earth-as-spacecraft in K2 in Fig. 4.** It is **Fig. 1** that made it more schematic.

4.5 双子のパラドックスに対する反駁

§4.1 および **4.4** でのケーススタディに基づいて、双子のパラドックスに対する本質的な反駁を述べる。**Fig. 4** の模式図は、出発点としての地球、折り返し点としての惑星 A、および飛び立つロケットを示す。**Fig. 4** では往路しか示していないのは、**§4.4** で示したように復路も同様であるからである。横軸、および縦軸はそれぞれ時間と位置を示す。速度 v_c でのローレンツ変換は $L(v_c)$ と略記した。

慣性系 K1(**Fig. 4** の左)では地球は静止している。K1 は $L(c/2)$ によって慣性系 K2 に変換さ

れる(右). K2 では Earth-as-spaceship は惑星 A と反対方向に速度 $v_E = -c/2$ で旅立つとみなせる. K2 は $L(-c/2)$ によって K3 に変換される. 正負が逆の速度の変換で収縮と拡張は完全に元に戻るので K3 は K1 と一致する(左). 双子のパラドックスに対する反駁の本質は Fig. 4 の K1 でのロケットと K2 の Earth-as-spaceship の違いにある. より模式的にしたのが Fig. 1 である.

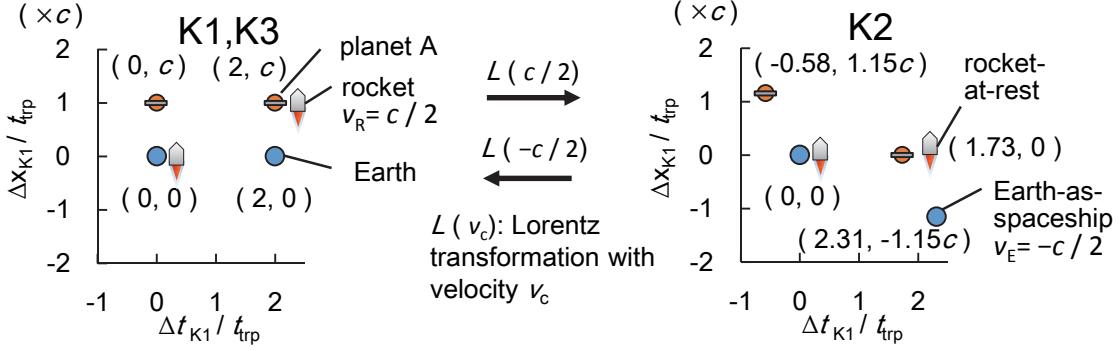


Fig. 4. Transformation to an inertial frame system in which the Earth-as-spaceship moves at 1/2 the velocity of light, and a rocket is stationary (schematic figure).

Fig. 4. Earth-as-spaceship が光速の 1/2 の速度で進み、ロケットが静止する系への変換(模式図).

Here we reconsider the time course of the journey of distance l in three inertial frames K1, K2, and K3.

- (1) In K1: The rocket arrives at Planet A in $T_{K1} = l/v_R (= 2t_{trp})$.
- (2) In K2: The rocket is at rest. The distance l is increased to $l_{K2} = l\beta (= 1.15ct_{trp})$, T_{K1} is reduced to $T_{K2_R} = T_{K1}/\beta (= 1.73t_{trp})$ at the rocket-at-rest, and T_{K1} is increased to $T_{K2_E} = T_{K1}\beta (= 2.31t_{trp})$ at the Earth-as-spaceship. These differences do not reflect a contradiction but rather the **relativity of length and time course**, as explained in §4.1 and 4.3.
- (3) In K3: The Earth-as-spaceship is at rest. The distance l_{K2} is reduced to $l_{K3} = l_{K2}/\beta = l$, T_{K2_E} is reduced to $T_{K3_E} = T_{K2_E}/\beta = T_{K1}$ at the Earth-as-spaceship at rest, and T_{K2_R} is increased to $T_{K3_R} = T_{K2_R}\beta = T_{K1}$ at the rocket-at-rest as spaceship.

These time courses and distances are doubled in the round trip as summarized in **Table II**.

Table II. Summary of the time courses and travel distances in the virtual space journey.

Inertial frame system	(Time course, Travel distance)	
	Earth	Rocket
K1, and K3 where the Earth is stationary	$\left(\frac{2l}{v_R}, 0\right)$	$\left(\frac{2l}{v_R}, 2l\right)$
K2 where the rocket is stationary	$\beta \left(\frac{2l}{v_R}, 2l\right)$	$\frac{1}{\beta} \left(\frac{2l}{v_R}, 0\right)$
l and v_R respectively denote the one-way distance of the round trip and the velocity of the rocket; and $\beta = 1/\sqrt{1 - v_R^2/c^2}$, where c denotes the velocity of light.		

ここで距離 l の旅行での時間経過を三つの慣性系 K1, K2, および K3 で再考する。

- (1) K1: ロケットは $T_{K1} = l/v_R (= 2t_{trp})$ で惑星 A に到着する。
- (2) K2: ロケットは静止している。距離 l は $l_{K2} = l\beta (= 1.15ct_{trp})$ に増加し、静止したロケットでは T_{K1} が $T_{K2_R} = T_{K1}/\beta (= 1.73t_{trp})$ に減少し、Earth-as-spacecraft では T_{K1} が $T_{K2_E} = T_{K1}\beta (= 2.31t_{trp})$ に増加する。これらは矛盾ではなく、§4.1 および 4.3 で示したように長さと時間経過の相対性である。
- (3) K3: Earth-as-spacecraft は静止している。距離 l_{K2} は $l_{K3} = l_{K2}/\beta = l$ に減少し、静止した Earth-as-spacecraft では T_{K2_E} が $T_{K3_E} = T_{K2_E}/\beta = T_{K1}$ に減少し、宇宙船としての rocket-at-rest では T_{K2_R} が $T_{K3_R} = T_{K2_R}\beta = T_{K1}$ に増加する。

時間経過と旅行距離を往復で 2 倍として **Table II** にまとめた。

Table II. 仮想的な宇宙旅行での時間経過と旅行距離のまとめ。

慣性系	(時間経過, 旅行距離)	
	地球	ロケット
地球が静止している K1, および K3	$\left(\frac{2l}{v_R}, 0\right)$	$\left(\frac{2l}{v_R}, 2l\right)$
ロケットが静止している K2	$\beta \left(\frac{2l}{v_R}, 2l\right)$	$\frac{1}{\beta} \left(\frac{2l}{v_R}, 0\right)$
l および v_R はそれぞれ往復旅行の片道の距離とロケットの速度を示す。また、 $\beta = 1/\sqrt{1 - v_R^2/c^2}$ 、ここで c は光速。		

The twin paradox and the wrong explanations are caused by lack of consideration as follows.

- (a) The expansion of the travel distance in K2 is not taken into account, probably because Lorenz contraction is erroneously considered applicable to all transformation.
- (b) Only the time course of the Earth-as-spaceship is considered in K2, probably because the time course at the rocket-at-rest and the time course at the Earth-as-spaceship are not properly distinguished.

There are explanations in books and web sites that the time of the Earth-as-spaceship (or the twin's clock stayed at the Earth) would go discontinuously at turning points of round trips if we assume the rocket to be stationary, however, the time discontinuity comes from the wrong turning points mistakenly shortened.

双子のパラドックスおよび間違った説明は、以下のように思慮不足が原因である。

- (a) K2 で旅行距離が拡張することが考慮されていない。おそらくローレンツ収縮が全ての変換に適用されると誤解されているためであろう。
- (b) K2 では Earth-as-spaceship の時間しか考慮されていない。おそらく rocket-at-rest での時間経過と Earth-as-spaceship での時間経過を正しく区別していないためであろう。

ロケットが止まっていると仮定すると Earth-as-spaceship (宇宙船地球号) の時間 (または、地球に残った双子の時計) が、往復旅行の折り返し点で不連続に進む旨の説明が書籍、および web site に見受けられるが、時間が不連続になる原因是、間違って短くした折り返し点に起因する。

5. Conclusion and postscript

The time courses in a virtual space journey at an extremely high speed of v_R , as is relevant to the theory of relativity, was considered. The effects of acceleration and gravity were neglected, because as the travel distance becomes long, these effects become relatively small. A clock in the inertial frame system K2, where the rocket is stationary, loses time at a rate of $1/\beta = \sqrt{1 - v_R^2/c^2}$, where c denotes the velocity of light, compared to the clock in the inertial frame system K1, where the Earth is stationary. While a clock in the Earth-as-spaceship in the inertial frame system K3, where the Earth is stationary, also loses time at a rate of $1/\beta$, compared to the clock in the rocket in K2. This is not a paradox, however, because the distance which the Earth-as-spaceship travels is extended at a rate of β in K2 (see **Fig. 1.**). The end result is that the time courses of the clock in the Earth-as-spaceship equal the time courses of the clock in the Earth at rest.

P.S.: The Earth at rest is like the rocket in K2 in **Fig. 1**. It may thus be worthwhile to think about the movement of the Earth in the universe as Galileo Galilei did.

5. 結論と追伸

相対性理論の影響を受けるような高速 v_R での仮想的な宇宙旅行を考察した。加速と重力の影響は旅行距離が長くなると相対的に小さくなるので無視した。ロケットが静止している慣性系 K2 での時計は地球が静止している慣性系 K1 の時計に対し $1/\beta = \sqrt{1 - v_R^2/c^2}$ (c : 光速)の割合で遅れる。一方、地球が静止している慣性系 K3 での Earth-as-spaceship の時計も K2 のロケットでの時計に対して $1/\beta$ の割合で遅れる。しかし、これはパラドックスではない。なぜなら、K2 での Earth-as-spaceship の旅行距離は β の割合で拡大されるからである(**Fig. 1** 参照)。結果として Earth-as-spaceship の時計での経過時間は、静止している地球の時計での経過時間と一致することになる。

追伸: 静止している地球は **Fig. 1** の K2 でのロケットのようなものである。ガリレオガリレイのように宇宙の中での地球の動きについて考えることは価値があるかもしれない。

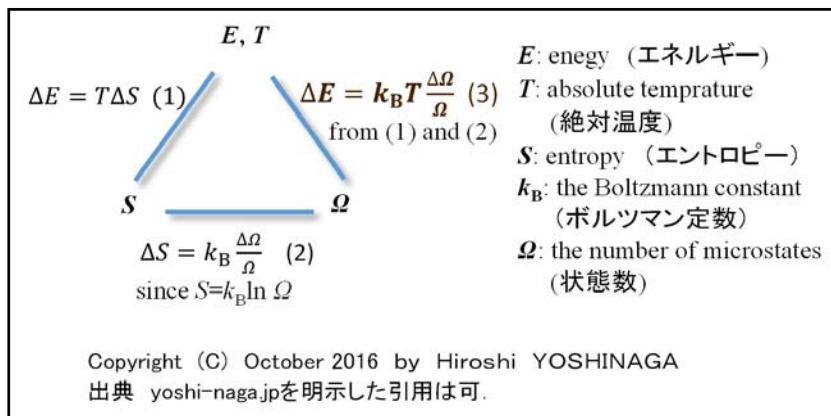
References

- 1) A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik, **17**, 891 (1905) [in German].
- 2) A. Einstein, Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie, Die Naturwissenschaften, **6**, 697 (1918) [in German].

「やっとわかった！」エネルギーと情報量の関係(2016.10). 発表はこのサイトのみ.

$$\Delta E = k_B T \Delta \Omega / \Omega$$

エンロトピーの定義式に基づいて、エネルギー変化 ΔE と状態数の変化率 $\Delta\Omega/\Omega$ には $\Delta E = k_B T \Delta \Omega / \Omega$ の関係があると解釈。ここで、 k_B :ボルツマン定数、 T :温度。エネルギーとエントロピーと情報量の関係は、解説本を読んでもわからなかつた。自己流の解釈で「やっとわかった！」。



温度 T とは「エネルギー変化 ΔE 」と「状態数の変化率 $\Delta\Omega/\Omega$ 」の比と解した。

「気体」、「光」、および「運動する粒子」への適用.

$$\Delta E = k_B T \frac{\Delta \Omega}{\Omega}$$

を「気体」、「光」、および「粒子の運動」の計算式へ適用したら単純明快な結果が得られました。素人による自己流の論理のため、誤っているかもしれません。

気体、光、および運動する粒子で共通

$$\Delta E = k_B T \frac{\Delta \Omega}{\Omega} \quad (3)$$

$$\Omega = a_1 p^{n_f n_p} \quad (4)$$

式(4)では以下を仮定した。

・(3)式の $\frac{\Delta \Omega}{\Omega}$ は比なので個々の粒子を区別する前提で状態数 Ω を計算しても良い。

・粒子1個の状態数は運動量 p の自由度 n_f 乗に比例。

(n_f の例: Heでは x, y, z の3, N₂では伸縮と回転が加わり5)

・粒子数 n_p の状態数 Ω は p^{n_f} の n_p 乗に比例。

$$(4) \rightarrow \frac{\Delta \Omega}{\Omega} = n_f n_p \frac{\Delta p}{p} \quad (5)$$

$$(3), (5) \rightarrow \Delta E = n_f n_p k_B T \frac{\Delta p}{p} \quad (6)$$

ここで

E : 粒子 n_p 個のエネルギー (J)

k_B : ボルツマン定数 $1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

T : 絶対温度(K)

Ω : 粒子 n_p 個の状態数

a_1 : 比例定数

Copyright (C) October 2016 by Hiroshi YOSHINAGA

気体への適用

$$p = a_2 \left(\frac{E}{n_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

式(6)では、粒子1個の運動量がエネルギーの1/2乗に比例すると仮定した。

$$(7) \rightarrow \frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E} \quad (8)$$

一方、式(9)が公知

$$E = \frac{n_f n_p}{2 N_a} RT \quad (9)$$

$$(6), (8), (9) \rightarrow R = k_B N_a \quad (10)$$

式(10)は公知であるが、ごく簡単に導出できた。

ここで

a_2 : 比例定数

R : 気体定数 $8.314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$

N_a : アボガドロ数 $6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Copyright (C) October 2016 by Hiroshi YOSHINAGA

光への適用

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad (11)$$

$$E = n_p h\nu \quad (12)$$

$$(11) \rightarrow \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta\nu}{\nu} \quad (13)$$

$$(12) \rightarrow \Delta E = n_p h \Delta\nu \quad (14)$$

光の自由度 n_f は x, y, z 方向の3と仮定し

$$(6), (13), (14) \rightarrow h\nu = 3k_B T \quad (15)$$

ここで

h : プランク定数 $6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$

ν : 振動数 s^{-1}

c : 光速 ms^{-1}

式(15)は黒体放射のピーク $h\nu = 2.82k_B T$ や
太陽光のピーク $h\nu \cong 5k_B T$ に近い。

Copyright (C) October 2016 by Hiroshi YOSHINAGA

運動する粒子への適用

$$p = mv \quad (16)$$

$$E = n_P \cdot \frac{1}{2}mv^2 \quad (17)$$

$$(16) \rightarrow \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta v}{v} \quad (18)$$

$$(17) \rightarrow \Delta E = n_P mv \Delta v \quad (19)$$

$$(6), (18), (19) \rightarrow mv^2 = n_f k_B T \quad (20)$$

ここで

m : 粒子1個の質量 kg

v : 粒子の速度 m s⁻¹

式(20)より、「運動する粒子の温度」は粒子1個のエネルギーに比例し、自由度に反比例、粒子の数によらない！

$$(17), (20) \rightarrow E = \frac{1}{2}n_f n_P k_B T \quad (21)$$

$n_f = 3$ とすれば式(9),(10)で自由度3とした気体と同じ。

Copyright (C) October 2016 by Hiroshi YOSHINAGA

[戻る.](#)