100mを 20 秒で往復する時間の相対論効果

-相対性理論の簡素な解説-

-「ローレンツ変換した時間と距離」と「測定を想定した時間と距離」の違い-

1. はじめに

宇宙旅行をすると経過時間が短くなる相対論効果は 100m を 20 秒で往復する場合にも生じる. 本稿では加減速を伴う走行で 100m を 20 秒で往復する場合の相対論効果の計算例を示す. 私は高校性の時にアインシュタインに憧れ相対性理論を大学で学べたらと思って受験勉強したが物理学科には行かなかった. 行ったとしても数学で挫折していたと思う. 数年前に一般相対性理論の計算式の解説本[1]を偶然一般書のコーナーで見かけ懐かしいと思って購入し計算式を知ることができた. しかし, 基本的な意味が「なんとなくよくわからなかった」ので「自己流で解説」した. アインシュタインの数多くの研究成果のなかの相対性理論のなかの入口部分の一部だけでも自分なりに理解できたので満足している. 相対性理論は, 等速での特殊相対性理論と加速や重力がある空間に拡張した一般相対性理論がある. 本稿では位置を1次元とした単純な条件として加速や重力がある条件では速度を変数とすることで簡便な特殊相対性理論のみで計算した. 計算方法が妥当であることはスカイツリーや GPS 衛星での相対論効果にかかる公表値と比較して確認した. 本稿で示した計算例についてはどなたかが「同じ計算条件で計算して答え合わせ」をしていただけないかと期待している.

本稿の構成を Table 1.1 に示す. **2. ローレンツ変換**では相対性理論[2]に準じた座標系, 変数, および計算式を示す. **3. 等速走行**では, 相対論効果をわかりやすくするために光速を実際とは異なる$15\ \mathrm{ms^{-1}}$(15m/s)として計算し, 時間と距離の計算値の伸縮について考察する. その後に, 光速を実際の$3.00 \times 10^8\ \mathrm{ms^{-1}}$(30 万 km/s)とした計算値を示す. **4. 加減速を伴う走行**では, 停止, 加速, 等速, 減速, そして停止の過程での相対論効果を計算する. 最初に計算式を提示し,

Table 1.1 構成.

2. ローレンツ変換	座標系, 変数, 計算式.
3. 等速走行	100m を 10 秒で通過する場合について光速$c = 15\ \mathrm{ms^{-1}}$, および$3.00 \times 10^8\ \mathrm{ms^{-1}}$とした試算. 時間と距離の伸縮についての考察.
4. 加減速を伴う走行	加速走行の計算式. 加速, 等速, および減速で 100m を 10 秒で走行する場合について光速$c = 100\mathrm{ms^{-1}}, 15\ \mathrm{ms^{-1}}$, および$3.00 \times 10^8\ \mathrm{ms^{-1}}$とした試算. 時間と距離の伸縮についての考察. 100m を 20 秒で往復する場合の時間.
5. 双子のパラドックス	既存の文献等とは異なる解説.
付録.1 動く棒の長さが縮む相対論効果	速度$v = 10\ \mathrm{ms^{-1}}$で走行する車の中にある長さ$l = 10\ \mathrm{m}$の棒の伸縮. メートル原器の伸縮に関する考察.
付録.2 重力による相対論効果	スカイツリー, GPS 衛星での相対論効果の計算例.

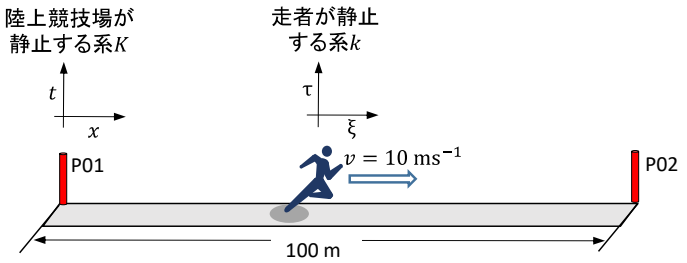
次に光速を$15\ \mathrm{ms}^{-1}$とした試算で考察し，最後に光速を$3.00 \times 10^8\ \mathrm{ms}^{-1}$とした場合の計算結果を示す．100m 地点に達して折り返すときに減速して停止するので往復の場合には単純に片道の 2 倍とした．5. **双子のパラドックス**では本稿での独自の考え方を示した．双子のパラドックスに関しては，数多くの図書や web site で解説されているが本稿の解説は異なる．**付録.1**では動く棒の長さの伸縮について述べた．ローレンツ収縮といわれることが単純な収縮でないことを説明する．さらにメートル原器の伸縮についての考察から光速が変化するとの前提での理論の構築について提言した．**付録.2** では解説本[1]での解説を自分なりに解釈し，重力による相対論効果の考え方とスカイツリー，および GPS 衛星での計算値を示した．

2. ローレンツ変換

座標系Kの時間t，および位置xと，Kに対して速度$v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$で移動している座標系$k$の時間$\tau$，および位置$\xi$の関係（いわゆる「ローレンツ変換」）は，光速を$c$とすれば，

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \xi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{Eq.2.1.}$$

記号の$K, k, t, x, \tau,$ およびξは，アインシュタインの特殊相対性理論[2]に準じ，位置は 1 次元x, ξのみとした．計算式は相対性理論と同じであるが見やすいように行列で表記した．本稿の計算は全て Eq.2.1 から導出している．具体的なイメージを Fig.2.1 に示す．**陸上競技場**が静止する座標系Kと**走者**が静止する座標系kでの時間と位置の関係式になる．



（2024.01 差し替え）

Fig.2.1 100m を 10 秒で通過する走者と陸上競技場．

kで静止する点$\xi = 0$への変換（**走者**が静止し，$\xi = 0$となる座標系kへの変換）の場合は Eq.2.1 で$x = vt$とすることで**陸上競技場**の時間t_{field}を**走者**の時間τ_{runner}に換算する式は，，

$$\tau_{\mathrm{runner}} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, t_{\mathrm{field}} \qquad \text{Eq.2.2,}$$

となる．速度vが光速cと比較して十分に小さい場合には$\tau_{\mathrm{runner}} \cong t_{\mathrm{field}}$であるが光速に近づくと$\tau_{\mathrm{runner}} < t_{\mathrm{field}}$となり宇宙旅行をすると時計の進み方が遅くなると一般に言われている現象が生じる．

なお，電卓等で計算する際に$v^2/c^2 \ll 1$で有効数字が不足する場合は，

$$\tau_{\mathrm{runner}} \cong \left(1 - \frac{1}{2}v^2/c^2\right) t_{\mathrm{field}} \qquad \text{Eq.2.3}$$

として近似することになる.

3. 等速走行

3.1 光速を毎秒 15m とした試算

ここでは 100 m を 10 秒で通過する$v = 10\ \mathrm{ms}^{-1}$の走行について計算する. まずは, 結果のイメージがいだきやすいように$c = 15\ \mathrm{ms}^{-1}$とする. Eq.2.1 は,

$$\begin{pmatrix}\tau\\ \xi\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-10^2/15^2}}\begin{pmatrix}1 & -10/15^2\\ -10 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ x\end{pmatrix}$$

となる. 計算する時点tは**走者**が P01, および P02 を通過する$t = 0$, および$t = 10$とし, 計算する地点xは P01, **走者**, および P02 とする. 計算結果は Table 3.1 となる. Fig.3.1 は**走者** runner が静止する座標系kをグラフ化したものである. **走者**が P02 を通過する時点で**陸上競技場**の経過時間は 10 秒となるのに対して**走者**の経過時間は 7.46 秒に短縮される(Table 3.1 の 4 行目).

Table 3.1　100m を 10 秒で通過する走行の相対論効果-光速が毎秒 15m の場合.

行	変　数				数値が示す意味	
	座標系K 陸上競技場が静止		座標系k 走者が静止		時　点	示す値
	t	x	τ	ζ		
1	0	0	0	0	**走者**が P01 を	P01 と**走者**の時間と位置
2	0	100	−5.96	134.2	通過($t = 0$)	P02 の時間と位置
3	10	0	13.42	−134.2	**走者**が P02 を	P01 の時間と位置
4	10	100	7.46	0	通過($t = 10$)	**走者**の時間と位置

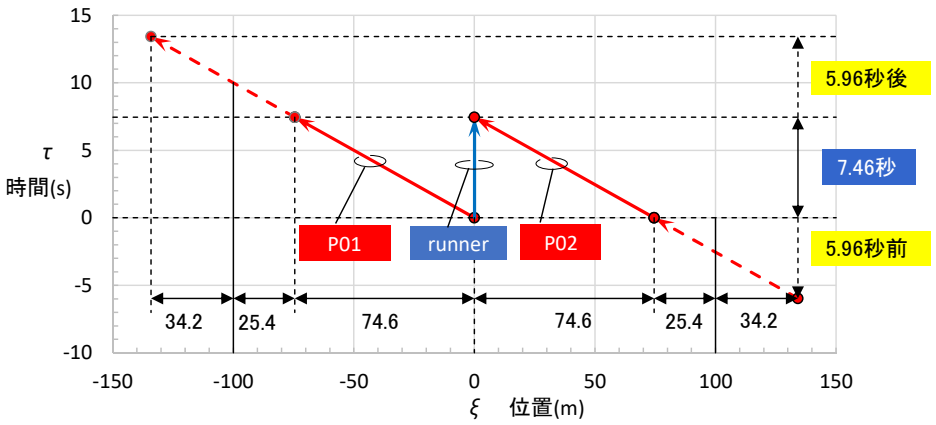


Fig.3.1 100m を 10 秒で通過する走者が静止する座標系kでの位置と時間.

ここで Table 3.1 の 1 行目と 2 行目について Fig.3.1 で考察する．座標系Kにおいて**走者**が P01 を通過する時点$t = 0$は，座標系kの**走者**では$\tau = 0$, P02 では$\tau = -5.96$となり，座標系Kにおいて同時の事象が座標系kでは同時でなくなる. P02 は過去の-5.96秒に**走者**から 134.2m 離れた位置にいて$7.46 - (-5.96)$=13.42 秒かけて**走者**の位置に達する．しかし，座標系kでの測定を想定すると**走者**が P01 と同じ位置にいる時点$\tau = 0$で P02 は 74.6m 離れた位置にいて，その後 7.46 秒かけて**走者**の位置に達する．P02 の移動距離は 100m でもなく 134.2m でもなく 74.6m となる．「**陸上競技場**の時間と距離はローレンツ変換で拡大する．しかし，測定を想定すると収縮」することになる．常識では「計算値=測定を想定した計算値」であることに疑念はないが，相対性理論を理解するためには「ローレンツ変換した時間と距離」と「測定を想定した時間と距離」が乖離することを考察する必要があると思う（宇宙物理の先生（匿名）に相談したら、計算値は測定を想定した計算値とすべき旨を御教示いただきました.）. 5.　**双子のパラドックス**で後述するが，「双子のパラドックスとの誤解の主要因はこの二面性を見落として収縮のみを考察していること」と考えている．

（2023.03 赤字部分修正）

3. 2 経過時間と距離の伸縮

ここで,時空上の 2 点の時間差と位置の差をΔとし変数を Table 3.2 として拡大と収縮を整理する．

Table 3.2　変数.

変　数	座標系	意　味
$\Delta t_{\mathrm{runner}}$	K (陸上競技場が静止)	**走者**の経過時間
$\Delta x_{\mathrm{runner}}$		**走者**の距離
$\Delta t_{\mathrm{field}}$		**陸上競技場**の経過時間
$\Delta x_{\mathrm{field}}$		**陸上競技場**の距離
$\Delta \tau_{\mathrm{runner}}$	k (走者が静止)	ローレンツ変換した**走者**の経過時間
$\Delta \xi_{\mathrm{runner}}$		ローレンツ変換した**走者**の距離
$\Delta \tau_{\mathrm{field,transformation}}$		ローレンツ変換した**陸上競技場**の経過時間
$\Delta \tau_{\mathrm{field,predicted\ measrement}}$		測定を想定した**陸上競技場**の経過時間
$\Delta \xi_{\mathrm{field,transformation}}$		ローレンツ変換した**陸上競技場**の距離
$\Delta \xi_{\mathrm{field,predicted\ measrement}}$		測定を想定した**陸上競技場**の距離

走者の時間と距離は Eq.2.1，$\Delta t_{\text{runner}} = \Delta t_{\text{field}}$，および$\Delta x_{\text{runner}} = v\Delta t_{\text{field}}$より，

$$\begin{pmatrix}\Delta\tau_{\text{runner}}\\ \Delta\xi_{\text{runner}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{pmatrix}1 & -v/c^2\\ -v & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta t_{\text{runner}}\\ \Delta x_{\text{runner}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{1-v^2/c^2}\,\Delta t_{\text{field}}\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{Eq.3.1}$$

Eq.2.2 と同じである.

陸上競技場の時間と距離は,

$$\begin{pmatrix}\Delta\tau_{\text{field,transformation}}\\ \Delta\xi_{\text{field,transformation}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{pmatrix}1 & -v/c^2\\ -v & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta t_{\text{field}}\\ \Delta x_{\text{field}}\end{pmatrix} \qquad \text{Eq.3.2}$$

に変換される. Eq.3.2 で$\begin{pmatrix}\Delta t_{\text{field}}\\ \Delta x_{\text{field}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \Delta x_{\text{field}}\end{pmatrix}$の同時刻で異なる位置は,

$$\begin{pmatrix}\Delta\tau_{\text{field,transformation}}\\ \Delta\xi_{\text{field,transformation}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{pmatrix}-v\Delta x_{\text{field}}/c^2\\ \Delta x_{\text{field}}\end{pmatrix} \qquad \text{Eq.3.3}$$

に変換されるので同時刻でなくなり，距離が$1/\sqrt{1-v^2/c^2}$倍に拡大する．また，Eq.3.2 で$\begin{pmatrix}\Delta t_{\text{field}}\\ \Delta x_{\text{field}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta t_{\text{field}}\\ 0\end{pmatrix}$の同一地点での異なる時間は,

$$\begin{pmatrix}\Delta\tau_{\text{field,transformation}}\\ \Delta\xi_{\text{field,transformation}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{pmatrix}\Delta t_{\text{field}}\\ -v\Delta t_{\text{field}}\end{pmatrix} \qquad \text{Eq.3.4}$$

に変換されるので異なる位置になり，時間が$1/\sqrt{1-v^2/c^2}$倍に拡大する.

しかし，座標系kでは陸上競技場は動いており，時間の測定を想定すると$\Delta\xi_{\text{field,transformation}} = 0$，距離の測定を想定すると$\Delta\tau_{\text{field,transformation}} = 0$ である．これらの条件での経過時間，および距離を「測定を想定した経過時間$\Delta\tau_{\text{field,predicted measrement}}$」，および「測定を想定した距離$\Delta\xi_{\text{field,predicted measrement}}$」と称することとし，Eq.3.2 において時間の測定では$-v\Delta t_{\text{field}} + \Delta x_{\text{field}} = 0$，距離の測定では$\Delta t_{\text{field}} - v\Delta x_{\text{field}}/c^2$=0 とすると,

$$\begin{pmatrix}\Delta\tau_{\text{field,predicted measrement}}\\ \Delta\xi_{\text{field,predicted measrement}}\end{pmatrix} = \sqrt{1-v^2/c^2}\begin{pmatrix}\Delta t_{\text{field}}\\ \Delta x_{\text{field}}\end{pmatrix} \qquad \text{Eq.3.5}$$

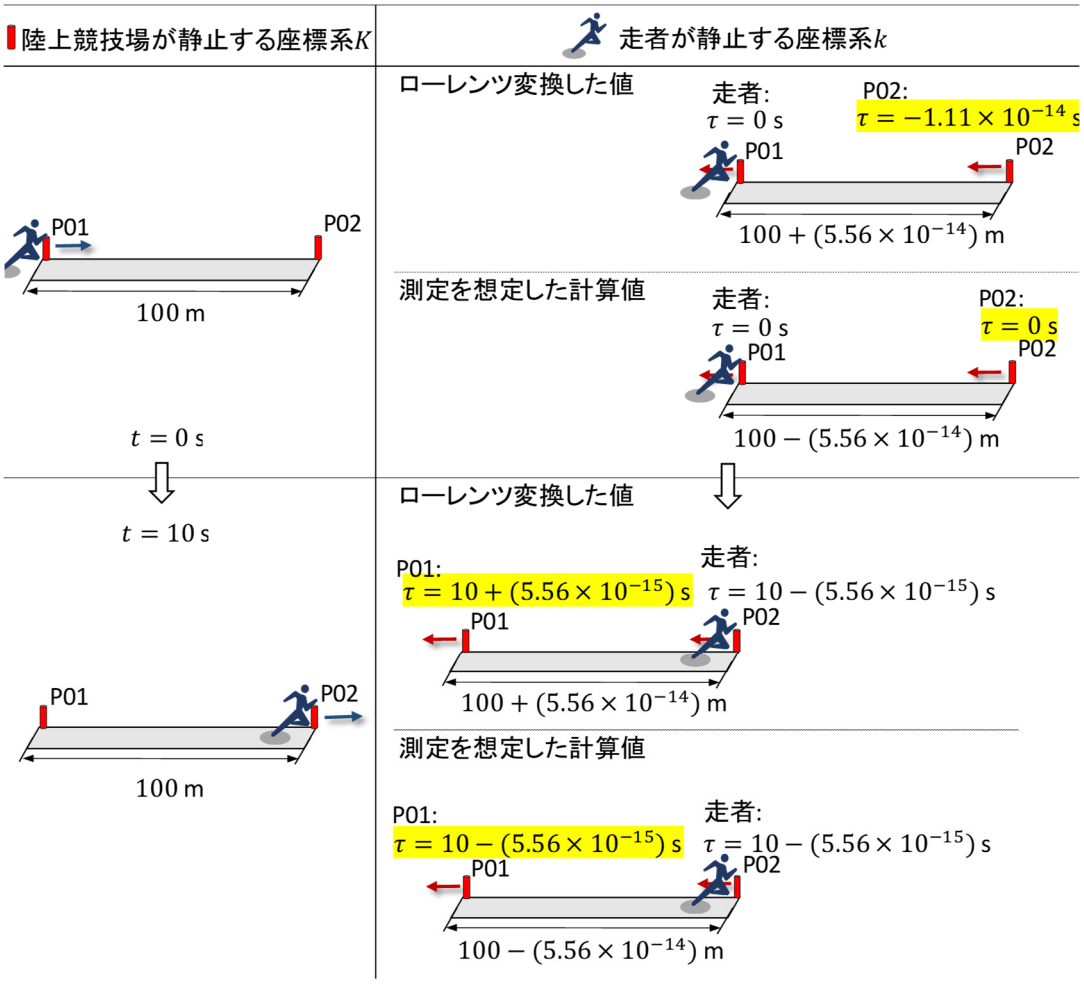
となって陸上競技場の経過時間と距離は座標系kで縮小することになる．陸上競技場の経過時間と距離はローレンツ変換すると拡大するが，測定を想定すると縮小するとの真逆の関係になる.

なお，実務的な距離の標準は光の到達に要する時間で定められていること，時間と同じ割合で距離が収縮する Eq.3.5，および光速が一定であることは整合している．距離の標準をメートル原器とした場合の考察については**付録. 1　動く棒の長さが縮む相対論効果，補足 1:メートル原器の伸縮**で述べる.

3.3 光速を毎秒 30 万 km とした試算

光速を実際の$c = 3.00 \times 10^8\ \mathrm{ms}^{-1}$として計算した結果を Fig.3.2 に図示する．**走者**が静止する座標系kにおいて**走者**の経過時間は$5.56 \times 10^{-15} = 0.000\ 000\ 000\ 000\ 00556$ 秒減少する．P01，および P02 の経過時間はローレンツ変換では5.56×10^{-15}秒，および$-5.56 \times 10^{-15} - (-1.11 \times 10^{-15}) \cong 5.56 \times 10^{-15}$(まるめ誤差の調整あり)秒増加するが，測定を想定するとともに5.56×10^{-15}秒減少する．P01，および P02 の移動距離はローレンツ変換では5.56×10^{-14}m増加するが，測定を想定するとともに5.56×10^{-14}m減少する

なお，ここでは陸上競技場の距離の伸縮について述べたが，動く棒の伸縮については**付録.1 動く棒の長さが縮む相対論効果**で説明する．



（2024.01 差し替え）

Fig.3.2 100m を 10 秒で通過する走者と陸上競技場の相対論効果.

4. 加減速を伴う走行

実際の走行，および旅行では加減速を伴う．ここでは加速でのローレンツ変換の式を導出して計算する．

4.1 計算式

ここでは**走者**が静止する座標系kでの**走者**の経過時間の計算式を示す．**陸上競技場**の経過時間と距離は Eq.3.4，および Eq.3.5 で計算できる．Eq.2.2 では**走者**の速度vは一定としてt_{field}，およびτ_{runner}を経過時間としたが，加減速ではvが変化するので微分，

$$\mathrm{d}\tau_{\mathrm{runner}} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\mathrm{d}t_{\mathrm{field}} \qquad \text{Eq.4.1}$$

に書き換える．一定速度v_{c}から加速度aで加速する際の速度$v = v_{\mathrm{c}} + at_{\mathrm{field}}$の場合は，

$$\mathrm{d}\tau_{\mathrm{runner}} = \sqrt{1 - (v_{\mathrm{c}} + at_{\mathrm{field}})^2/c^2}\,\mathrm{d}t_{\mathrm{field}} \qquad \text{Eq.4.2.}$$

ここで,$v^2/c^2 \ll 1$の場合について，

$$\mathrm{d}\tau_{\mathrm{runner}} \cong \left(1 - \frac{1}{2}(v_{\mathrm{c}} + at_{\mathrm{field}})^2/c^2\right)\mathrm{d}t_{\mathrm{field}} \qquad \text{Eq.4.3}$$

として近似して積分すると，

$$\Delta\tau_{\mathrm{runner}} \cong \Delta t_{\mathrm{field}} - \frac{3{v_{\mathrm{c}}}^2\Delta t_{\mathrm{field}} + 3v_{\mathrm{c}}a{\Delta t_{\mathrm{field}}}^2 + a^2{\Delta t_{\mathrm{field}}}^3}{6c^2} \qquad \text{Eq.4.4.}$$

よって，座標系kと座標系Kでの時間の差$\Delta T = \Delta\tau_{\mathrm{runner}} - \Delta t_{\mathrm{field}}$は，

$$\Delta T = \Delta\tau_{\mathrm{runner}} - \Delta t_{\mathrm{field}} \cong -\frac{3{v_{\mathrm{c}}}^2\Delta t_{\mathrm{field}} + 3v_{\mathrm{c}}a{\Delta t_{\mathrm{field}}}^2 + a^2{\Delta t_{\mathrm{field}}}^3}{6c^2} \qquad \text{Eq.4.5.}$$

4.2 試算

停止状態から$a_1 = \frac{100}{21}\,\mathrm{ms}^{-2}$で$\Delta t_{\mathrm{field},1} = 3$秒間加速走行，次に$v_{\mathrm{c}} = \frac{100}{7}\,\mathrm{ms}^{-1}$で$\Delta t_{\mathrm{field},2} = 4$秒間等速走行，最後に$a_2 = -\frac{100}{21}\,\mathrm{ms}^{-2}$で$\Delta t_{\mathrm{field},3} = 3$秒間減速走行して停止する走行を光速$c = 100\,\mathrm{ms}^{-1}$として Eq.4.5 で試算する（$c = 15\,\mathrm{ms}^{-1}$では近似誤差が大きいので$c = 100\,\mathrm{ms}^{-1}$とした.）．停止，加速走行，等速走行，減速走行，および停止により 100m を 10 秒で走ることになる．最初の 3 秒間の加速では，$v_{\mathrm{c}} = 0$ として，

$$\Delta T \cong -\frac{\left(\frac{100}{21}\right)^2 \cdot 3^3}{6 \cdot 100^2} \cong -0.010$$

次の 4 秒間での等速では$a = 0$として，

$$\Delta T \cong -\frac{3 \cdot \left(\frac{100}{7}\right)^2 \cdot 4}{6 \cdot 100^2} \cong -0.041$$

最後の 3 秒間の減速では,

$$\Delta T \cong -\frac{3\cdot\left(\frac{100}{7}\right)^2\cdot 3+3\cdot\frac{100}{7}\left(-\frac{100}{21}\right)\cdot 3^2+\left(-\frac{100}{21}\right)^2\cdot 3^3}{6\cdot 100^2} \cong -0.010$$

の合計で$\sum\Delta T \cong -0.010-0.041-0.010=-0.061$秒となる. Eq.4.2 で$\mathrm{d}t_{\mathrm{field}}$=0.01 秒として表計算ソフトで数値計算した値とも一致した. 次に, 光速 $c=15\ \mathrm{ms}^{-1}$として Eq.4.2 で数値計算した結果について横軸を陸上競技場の時間としてグラフ化したものを Fig.4.1 に示す. (1)**速度**は縦軸を速度としている. (2)**時間**では縦軸を走者の経過時間としている. グラフの傾きは走行開始時点で1/1であるが加速すると小さくなり,等速では一定になり, 減速すると1/1に戻る. 加速をすることで時間の進み方が遅くなる系へ移行して傾きが小さくなる状況が把握できる.

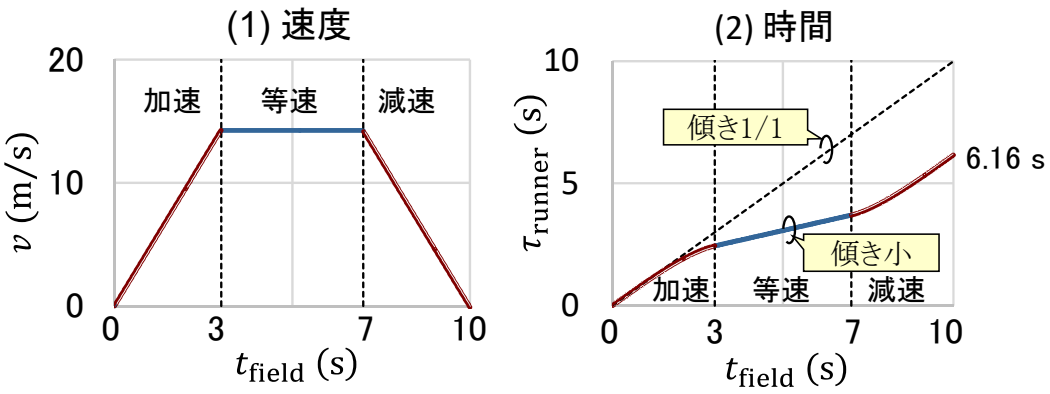


Fig.4.1 加減速をして 100m を 10 秒で走行する時間の相対論効果.
模擬的に光速を 15ms⁻¹ として試算.

走者の時間が 6.16 秒に収縮し, 3. **等速走行**の場合の 7.45 秒より短くなる.

光速を実際の$c=3.00\times10^8\ \mathrm{ms}^{-1}$として Eq.4.5 で計算すると**走者**の時間は $10-6.80\times10^{-15}$ 秒となり, 等速で通過する場合の$10-5.56\times10^{-15}$ 秒より短くなる.

4.3 100m を 20 秒で往復する時間

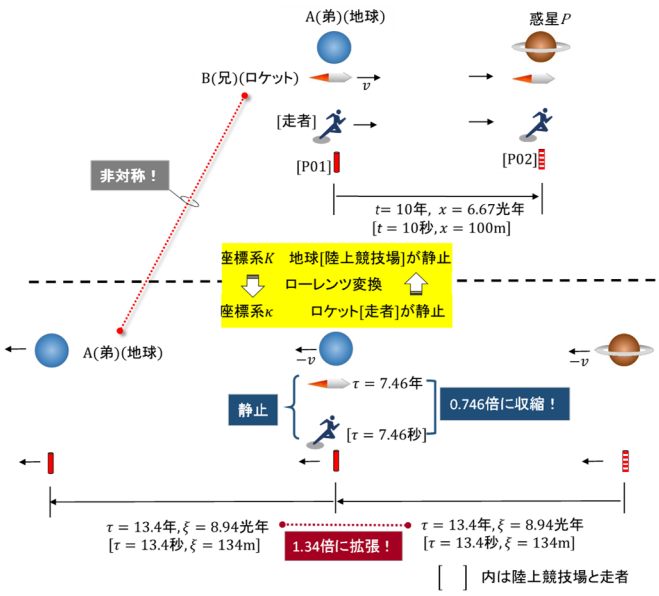
4.2 では片道の計算をしたが 100m の折り返し地点で**走者**は静止しているので帰路も往路と同じ計算値になる. よって**走者**の時計での往復の時間は$(10-6.80\times10^{-15})\times2=20-1.36\times10^{-14}$秒.

5. 双子のパラドックス

ここで，双子のパラドックスについて考察する．双子のパラドックスとは，宇宙旅行する兄よりも地球に残っている**弟**の時間経過が早いならば，**兄**に対して弟が動くと解すれば逆になる旨の矛盾である．**3.1 光速を毎秒 15m とした試算**の例で説明すると**陸上競技場**での 10 秒が**走者**での 7.46 秒になるなら，**走者**からすると**陸上競技場**の方が動くので**陸上競技場**での時間は 7.46 秒より短くなる旨の矛盾である．

このことが誤解であることを Fig.5.1 で説明する．**陸上競技場の P01**，**陸上競技場の P02**，**走者**，**秒**，および m を宇宙旅行での**地球**，**惑星 A**，**ロケット**，**年**，および**光年**で例示している．$v = \frac{10}{15}c$ (v: 速度, c: 光速)とすれば宇宙旅行での計算結果になる．

走者と**陸上競技場**はシンメトリーに 100m を 10 秒で逆方向に進むのではない．**陸上競技場**が静止する**座標系K**では**走者**が 100m を 10 秒で走行し，**走者**が静止する**座標系k**では**陸上競技場**が 134m を 13.4 秒で走行する非対象な関係である．**ロケットで旅行する兄**と**地球にいる弟**はシンメトリーに ~~100~~ 6.67 光年を 10 年で逆方向に進むのではない．**地球が静止**(自転や公転による相対論効果は無視できるほど小さいとの意味での静止.)する**座標系K**では**兄のロケット**が ~~100~~ 6.67 光年を 10 年で飛行し，**ロケットが静止**する**座標系k**では**地球**が ~~134~~ 8.94 光年を 13.4 年で飛行する非対象な関係である．しかし，**座標系K**では同時刻の事象が**座標系k**では同時刻でなくなる．位置の測定は同時刻で行うと想定すると陸上競技場，または惑星の距離は 74.6m，または ~~74.6~~ 4.97 光年に収縮することになり，移動時間も 7.46 秒，または 7.46 年に収縮する．**座標系k**から**座標系K**に変換するとさらに収縮することになるので矛盾していると誤解する．(2023.03 赤字部分修正)



(2024.01 差し替え)

Fig.5.1 宇宙旅行と陸上競技場の相対論効果の模式図.

なお，Fig.4.1 で示したように加減速は時間の進み方が異なる系に移行することである．加減速のる走行での相対論効果は Eq.4.2，または Eq.4.5 で計算できる．加減速の区間と比較して等速の区間が長くなると相対論効果で収縮する時間を等速区間だけで計算しても大きくずれることはない．

6. おわりに

解説本[1]を読んで，物理の学生の方はこんな難解なことを短期間で理解しているのかと能力の差を感じた．能力不足を自覚しつつも毎日，あれこれ考えることが楽しかった．小学生のころ辞典に載っていた星雲の美しさに惹かれて繰り返しながめていたし，宇宙は無限に遠くまであるのかとか電波とは何だろうかと疑問に思い子供心で考えていた．そのような疑問に答えてくれるのが物理と知って物理に憧れた．なぜ$E = mc^2$なのかとか電子が干渉するのかとかは解説本を読んだり，あれこれ考えてもいまだによくわからないし，宇宙の大きさ，年齢および質量が座標系によって 0 や無限大になるような気もする．賢い人が解説してくれないかなと期待している．また，宇宙観測の装置のしくみをマスコミ報道しているのを視聴しても関係の方々の能力の高さに驚愕する．これからも新しい観測が報道されるのを楽しみにしている．

付録. 1　動く棒の長さが縮む相対論効果

座標系kで静止している長さ$l = 1$ mの棒が座標系Kにおいて速度vで動く場合の長さLを計算する（ Fig.A.1.1).

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{pmatrix}1 & -v/c^2\\ -v & 1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{pmatrix}1 & +v/c^2\\ +v & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{Eq.A.1.1}$$

となるので Eq.2.1 の逆変換は,

$$\begin{pmatrix}t\\ x\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{pmatrix}1 & +v/c^2\\ +v & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ \xi\end{pmatrix} \qquad \text{Eq.A.1.2.}$$

座標系kでは棒の一方の端を$(\tau,\xi)=(0,0)$とし，もう片方を$(\tau,\xi)=(0,l)$と同時刻にしても Eq.A.1.2 から，座標系Kにおいては$t\neq 0$となり同時刻でなくなる．ここでは座標系Kにおける同時刻$t=0$を前提とし，この条件を満たすようにτを設定する．Eq.2.1 で$(t,\ x)=(0,L),\xi=l$とすれ

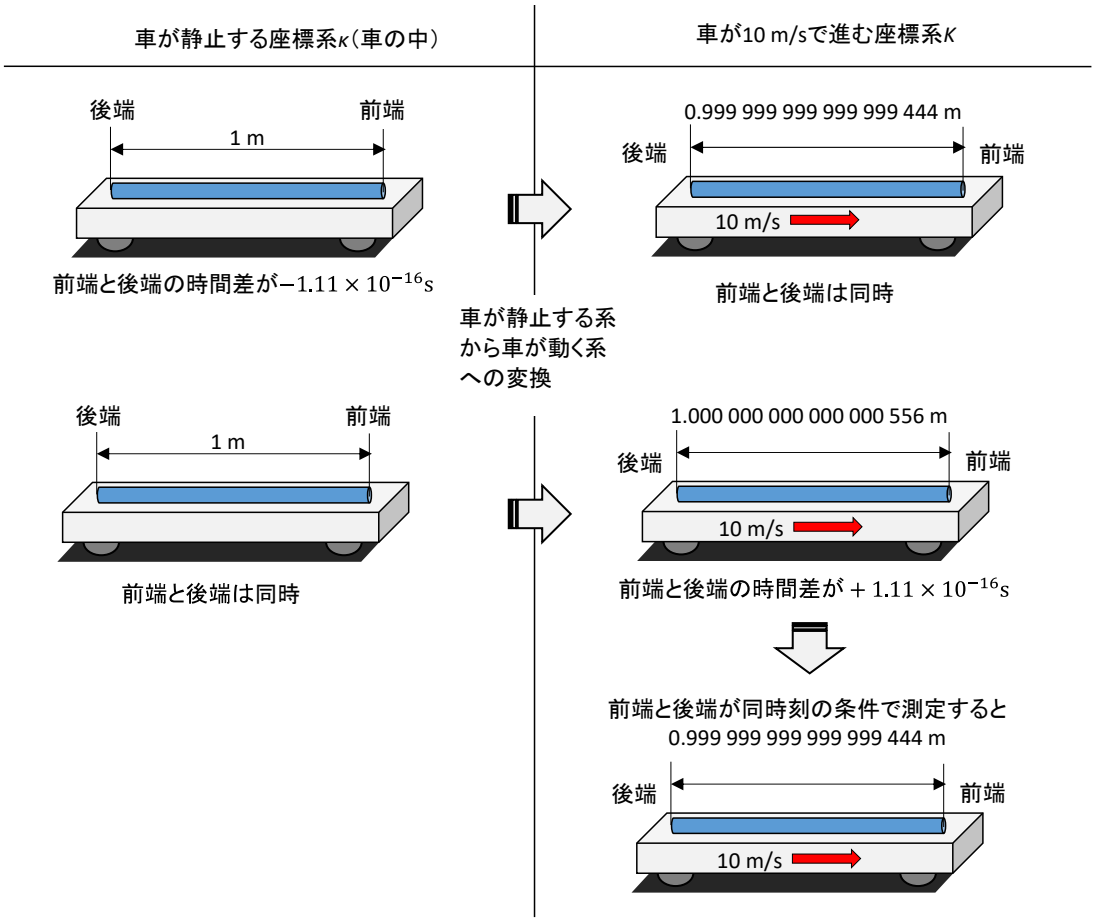


Fig.A.1.1 動く棒の相対論効果.

ば,

$$\begin{pmatrix}\tau\\ l\end{pmatrix}=\frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\begin{pmatrix}-v/c^2\\ 1\end{pmatrix} \qquad \text{Eq.A.1.3.}$$

よって,

$$L=\sqrt{1-v^2/c^2}\,l\cong\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right)l \qquad \text{Eq.A.1.4,}$$

$$\tau=-\frac{v}{c^2}l \qquad \text{Eq.A.1.5.}$$

Eq.A.1.4 から，スプリンターと同じ速度$v=10\ \mathrm{ms}^{-1}$で走っている車の中の$l=1\ \mathrm{m}$の棒は，陸上競技場が静止する座標系Kでは,

$L\cong(1-(v^2/(2c^2)))l\cong 1-(5.56\times10^{-16})=0.999\,999\,999\,999\,999\,444\ \mathrm{m}$

に収縮する(いわゆるローレンツ収縮). ここで注意しなければいけないのは，前端と後端の時間差$\tau=-(v/c^2)\,l=-1.11\times10^{-16}\ \mathrm{s}$ の$1\ \mathrm{m}$の棒は，$1-(5.56\times10^{-16})\ \mathrm{m}$ に収縮するが，両端が同時の$1\ \mathrm{m}$の棒は，前端と後端の時間差が$1.11\times10^{-16}\ \mathrm{s}$ の $1+(5.56\times10^{-16})\ \mathrm{m}$ に拡張することである(Fig.A.1.1). 座標系Kでの同時刻を前提として距離を比較することは偏った(対等でない. シンメトリーでない.) 比較であり，長さに関しても双子のパラドックス(弟からみた兄の物差しは短く，兄からみた弟の物差しも短い.) が生じるように誤解される.

補足 1:メートル原器の伸縮

相対論効果により棒が伸縮することはメートル原器も伸縮することを意味するので，メートル原器を長さの標準とすると測定する長さは不変になる. しかし，光速を一定として光の到達に要する時間で距離の標準を定めると Eq.3.5 で示したように時間と同じ割合で距離も収縮することになる. 二つの異なる時計で時間の進み方が異なることは測定でも確認されているが，同じメートル原器の長さが異なることには違和感がある. 相対性理論は*光の速度*$c=$ *距離*$l/$*時間*tが一定であることを出発点としている. しかし，lが一定でcとtが変化することを出発点として理論を構築することも考えられる. Eq.2.1 で伸縮するのは時間のみとすると,

$$\begin{pmatrix}\tau\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \dfrac{-v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\\ -v & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ x\end{pmatrix} \qquad \text{Eq.A.1.6.}$$

光の位置$x=ct$は,

$$\begin{pmatrix}\tau\\ \xi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\dfrac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\\ c-v\end{pmatrix}t \qquad \text{Eq.A.1.7.}$$

に変換されるので，座標系kでの光速c_kは，

$$c_k = \frac{\xi}{\tau} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, c \qquad \text{Eq.A.1.8.}$$

として理論を再構築できるような気がする．理論を再構築するためには距離と時間の定義，および光速が一定であることの根拠となった実験を熟考することが必要であろう．

重力で光の速度が遅くなること，および0になることで重力レンズ効果，およびブラックホールから光が出られなくなる現象が生じると説明できればわかりやすい．

付録. 2　重力による相対論効果

(1) スカイツリー

スカイツリーの 1 階での時間$\tau_{0\mathrm{m}}$と展望台(高低差$h = 450\ \mathrm{m}$)での時間$t_{450\mathrm{m}}$が重力の影響で異なる相対論効果は Fig.A.2.1 のように考えて計算できる.「展望台が静止する座標系K(時間t, 位置x)」と「展望台から重力加速度$g = 9.8\ \mathrm{ms}^{-2}$で自由落下(free fall) して 1 階の位置で自由落下の速度がv_{fall}となった座標系K'(時間t', 位置x')」では時間は一致する. また, 1 階が静止する座標系kは, 座標系K'に対して速度$-v_{\mathrm{fall}}$で移動するとみなせる. よって, Eq.2.3 と同様して,

$$\tau_{0\mathrm{m}} \cong \left(1 - \frac{1}{2}v^2/c^2\right)t_{450\mathrm{m}} \qquad \text{Eq.A.2.1}$$

で計算する. $v_{\mathrm{fall}} = (2gh)^{0.5}$より

$$\tau_{0\mathrm{m}} \cong t_{450\mathrm{m}} - \frac{(-v_{\mathrm{fall}})^2}{2c^2}t_{450\mathrm{m}} = t_{450\mathrm{m}} - \frac{gh}{c^2}t_{450\mathrm{m}} \qquad \text{Eq.A.2.2.}$$

結果的に重力ポテンシャルでの計算 (例えば[1]) と整合する. 31 日間 (1 ケ月) に相当する$t_{450\mathrm{m}} = 2.7 \times 10^6\ \mathrm{s}$での展望台と 1 階の時間差は$t_{450\mathrm{m}} - \tau_{0\mathrm{m}} \cong ghc^{-2}t_{450\mathrm{m}} \cong 1.3 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}$. この計算値は光格子時計の実験における計算値のマスコミ報道[3]と一致する.

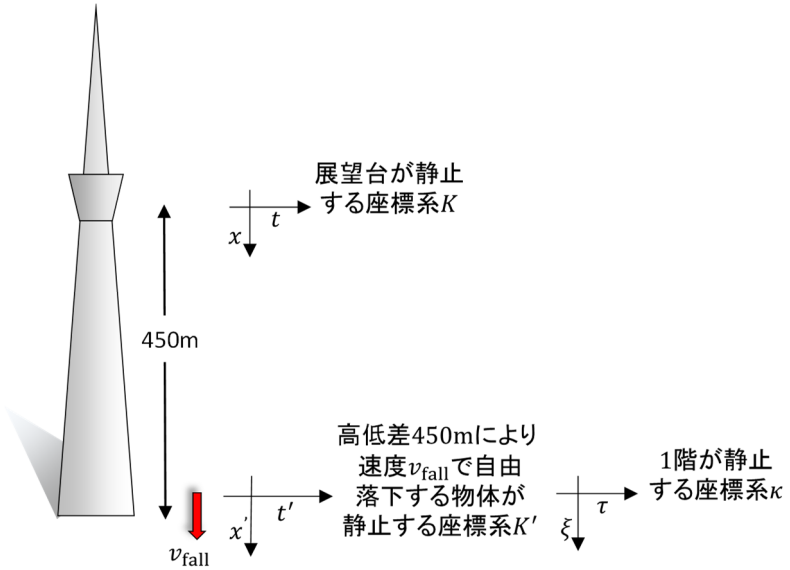


Fig.A.2.1 重力による相対論効果の考え方.

(2) GPS 衛星

同様にして地上での時間Tに対する GPS 衛星(米国)での時間T_{GPS}の進む割合$(T_{\mathrm{GPS}} - T)/T = \Delta T/T$を GPS 衛星の公転速度による進み$\Delta T_{\mathrm{V}}/T$ (遅れるので負の値) と地球の重力による進み$\Delta T_{\mathrm{G}}/T$の和

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_{\mathrm{V}}}{T} + \frac{\Delta T_{\mathrm{G}}}{T} \qquad \text{Eq.A.2.3}$$

として計算する．地球の自転速度を考慮すると計算が複雑になること，および地球の自転速度は衛星の公転速度よりも十分に小さいことから地球の自転速度は見込まない．また，ΔTは十分に小さいので$\Delta T/T \cong \Delta T/T_{\mathrm{GPS}}$とみなす．

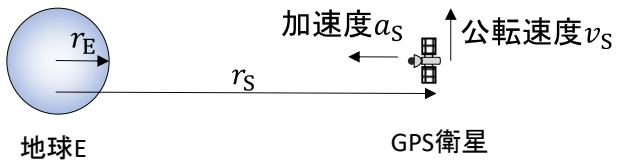


Fig.A.2.2 GPS 衛星の模式図.

a）GPS 衛星の公転速度による時計の進み $\Delta T_{\mathrm{V}}/T$

質量M_{S}の衛星 S が半径R_{S}, 速度v_{S}で質量M_{E}の地球に対して公転しているとき（ Fig.A.2.2 ），万有引力定数をGとした重力$F = GM_{\mathrm{E}}M_{\mathrm{S}}R_{\mathrm{S}}^{-2}$，質量$M_{\mathrm{S}}$，および加速度$a_{\mathrm{S}} = v_{\mathrm{S}}^2 R_{\mathrm{S}}^{-1}$の運動方程式は,

$$GM_{\mathrm{E}}M_{\mathrm{S}}R_{\mathrm{S}}^{-2} = M_{\mathrm{S}}v_{\mathrm{S}}^2 R_{\mathrm{S}}^{-1} \qquad \text{Eq.A.2.4.}$$

Eq.2.3 で$t_{\mathrm{field}} = T, \tau_{\mathrm{runner}} - t_{\mathrm{field}} = \Delta T_{\mathrm{V}}$,および$v = v_{\mathrm{S}}$とすると$\Delta T_{\mathrm{V}}/T \cong -v_{\mathrm{S}}^2/(2c^2)$ となるのでv_{S}を Eq.A.2.4 で置き換えると,

$$\frac{\Delta T_{\mathrm{V}}}{T} \cong -\frac{GM_{\mathrm{E}}}{2c^2 R_{\mathrm{S}}} \cong -0.83 \times 10^{-10}$$

ここで，$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}, M_{\mathrm{E}} = 5.97 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$, および $R_{\mathrm{S}} = 2.66 \times 10^{7}\ \mathrm{m}$とした.

b）地球の重力による時計の進み$\Delta T_{\mathrm{G}}/T$

地球からの距離xにある質量mの物体に作用する重力$F = -GM_{\mathrm{E}}mx^{-2}$が，衛星の公転半径$R_{\mathrm{S}}$から地球の半径$R_{\mathrm{E}}$の位置まで自由落下する物体に作用する仕事量$\int F\mathrm{d}x$は落下速度$v_{\mathrm{fall}}$の運動エネルギーと等しくなるので,

$$\int_{R_{\mathrm{S}}}^{R_{\mathrm{E}}} -GM_{\mathrm{E}}mx^{-2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, m{v_{\mathrm{fall}}}^2 \qquad \text{Eq.A.2.5.}$$

スカイツリーでの計算と同様に考え,Eq.A.2.1 で$t_{450\mathrm{m}} = T_{\mathrm{GPS}}$，$\tau_{0\mathrm{m}} = T$，および$v^2 = {v_{\mathrm{fall}}}^2$とすると，$(T_{\mathrm{GPS}} - T)/T_{\mathrm{GPS}} \cong {v_{\mathrm{fall}}}^2/(2c^2)$．左辺の$(T_{\mathrm{GPS}} - T)/T_{\mathrm{GPS}} \cong \Delta T_{\mathrm{G}}/T$とし，右辺の$v_{\mathrm{fall}}$を Eq.A.5 で置き換え積分すると,

$$\frac{\Delta T_{\mathrm{G}}}{T} \cong \frac{GM_{\mathrm{E}}}{c^2}\left(-\frac{1}{R_{\mathrm{S}}}+\frac{1}{R_{\mathrm{E}}}\right) \cong 5.28 \times 10^{-10} \qquad \text{Eq.A.2.6.}$$

ここで，$R_{\mathrm{E}} = 6.37 \times 10^6$ mとした.

c) GPS 衛星での時計の進み

以上より, GPS 衛星での時計の進みは

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_{\mathrm{V}}}{T} + \frac{\Delta T_{\mathrm{G}}}{T} = (-0.83 \times 10^{-10}) + (5.28 \times 10^{-10}) = 4.45 \times 10^{-10} \qquad \text{Eq.A.2.7}$$

となり，衛星から周波数fで送信した電波の周波数の増加Δfは$\Delta f/f = -4.45 \times 10^{-10}$となる（ 周波数は時間の逆数なので正負が反転 ）. 解説書[4]では上記と同様な簡易な計算で$\Delta f/f = -4.464 \times 10^{-10}$としており, Eq.A.2.7 の計算値は整合する. また，文献[5]に記載された GPS 衛星 NTS-2 での時間の進みの計算値445.0×10^{-12}，および測定値442.5×10^{-12}ともよく整合する. 文献[5]には GPS 衛星の信号の周波数のずれ（ offset ）を相対論効果の補正で縮小した旨が記載されている.

補足 1： 大気と自転がない星の地上すれすれの位置を公転する衛星の場合

Eq.A.2.6 より，大気がない星の地上すれすれの位置$R_{\mathrm{S}} \cong R_{\mathrm{E}}$を公転する衛星の場合には重力による進み$\Delta T_{\mathrm{G}}/T \cong 0$となり,この星の自転がなければ，$\Delta T/T \cong \Delta T_{\mathrm{V}}/T \cong -GM_{\mathrm{E}}/(2c^2R_{\mathrm{E}})$ となり, 衛星の時計のずれは公転速度による遅れ

$$\Delta T \cong \Delta T_{\mathrm{V}} \cong -\frac{GM_{\mathrm{E}}}{2c^2R_{\mathrm{E}}}T \qquad \text{Eq.A.2.8}$$

のみとなる. 衛星の時計の遅れ$-\Delta T$は経過時間Tに比例して増える.

References

[1] 石井俊全: 一般相対性理論を一歩一歩数式で理解する，ベレ出版.

[2] A. Einstein: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik, **17**, 891 (1905) [in German]. (web site で英訳を入手).

[3] NHK: 展望台の時計　地上より早く進む? スカイツリーで実験, 2018.10.03.

[4] B.ホフマン-ウェレンホフ, H.リヒテネガー, J.コリンズ，西修二郎（訳）: GPS 理論と応用，丸善出版.

[5] James A. Buisson, Roger L. Easton, Thomas B. McCaskill; INITIAL RESULTS OF THE NAVSTAR GPS NTS-2 SATELLITE, Proceedings of the 9th Annual Precise Time and Time Interval Applications and Planning Meeting, 177–199, 1977. (web site で入手).