

100m を 10 秒で駆けるスプリンターと陸上競技場の相対論効果
-相対性理論の簡素な解説-

座標系 K （例:陸上競技場が静止する座標系）と K に対して動いている座標系 k （例:スプリンターが静止する座標系）では時間の進み方が異なる（相対論効果）。本稿では100mを10秒で駆けるスプリンターと陸上競技場で計算して相対性理論を解説する。最初に10秒間の等速の条件で計算し(1.),次にスタートから5秒間の等加速度と残り5秒間の等速の条件で計算し(2.),最後にまとめる(3.).付録として重力による相対論効果についてGPS衛星の時計の計算例で述べる。

なお, K, k, t, x, τ, ξ の記号はアインシュタインの特殊相対性理論[1]に準じ,位置は1次元 x, ξ のみとした。

1. 一定速度を前提とした特殊相対性理論での計算

1.1 計算式

座標系 K の時間 t ,および位置 x と, K に対して速度 $v = dx/dt$ で移動している座標系 k の時間 τ ,および位置 ξ の関係（いわゆる「ローレンツ変換」）は,光速を c とすれば,

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \xi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \quad (1).$$

k で静止する点 $\xi = 0$ への変換（スプリンターが静止し, $\xi = 0$ となる座標系 k への変換）の場合には $x = vt$ となるので,(スプリンターの)時間 $\tau_{\xi=0}$ は,式(1)から,

$$\tau_{\xi=0} = \sqrt{1 - v^2/c^2} t \quad (2).$$

また, K における $x = 0$ （陸上競技場のスタート地点）の k での時間 $\tau_{x=0}$ と位置 $\xi_{x=0}$ は,式(1)から,

$$\begin{pmatrix} \tau_{x=0} \\ \xi_{x=0} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} t \\ -vt \end{pmatrix} \quad (3).$$

$v^2 \ll c^2$ を前提として式(2),および(3)を近似すると,

$$\tau_{\xi=0} \cong t - \frac{v^2}{2c^2} t \quad (4),$$

$$\tau_{x=0} \cong t + \frac{v^2}{2c^2} t \quad (5),$$

$$\xi_{x=0} \cong -vt - \frac{v^3}{2c^2} t \quad (6).$$

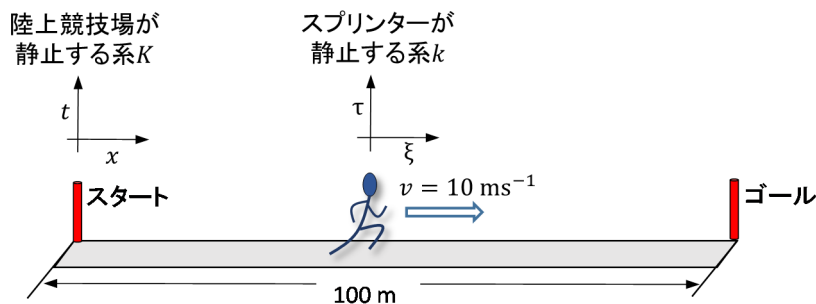


図-1 100m を 10 秒で駆け抜けるスプリンターと陸上競技場.

1.2 計算

以上について100mを10秒間の一定速度で駆け抜けるスプリンターと陸上競技場(図-1)で計算した結果を図-2に示す.

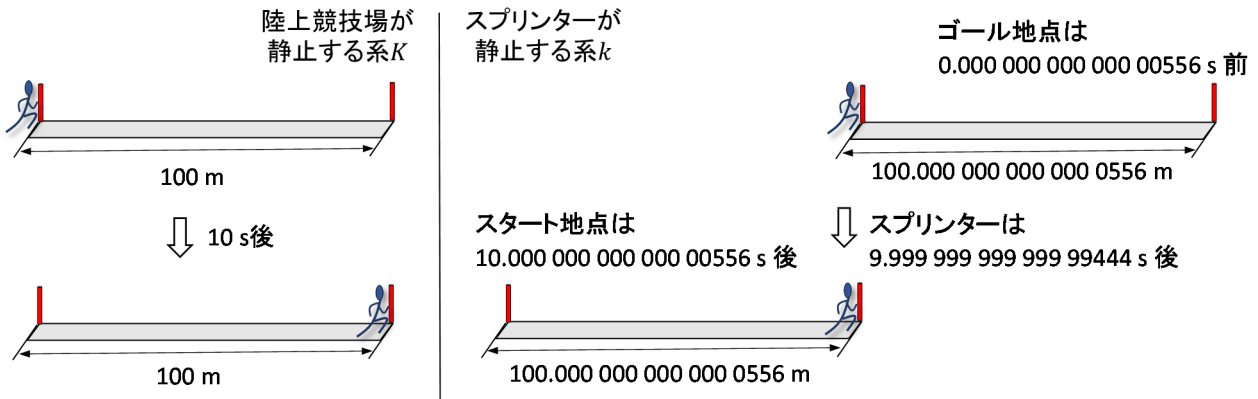


図-2 100mを10秒で駆け抜けるスプリンターと陸上競技場の相対論効果.

以下, スプリンターが静止する座標系 k におけるスプリンターの時間 $\tau_{\xi=0}$, スタート地点の時間 $\tau_{x=0}$, およびスタート地点の位置 $\xi_{x=0}$ について説明する. 式(4)で $t = 10 \text{ s}$, $v = 100/10 = 10 \text{ ms}^{-1}$, および $c = 3.00 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ とすれば, $\tau_{\xi=0} \cong 10 - (5.56 \times 10^{-15}) = 9.999\ 999\ 999\ 999\ 99444$ 秒. 式(5)より, $\tau_{x=0} \cong 10 + (5.56 \times 10^{-15}) = 10.000\ 000\ 000\ 000\ 00556$ 秒, 式(6)より, $\xi_{x=0} \cong -100 - (5.56 \times 10^{-14}) = 100.000\ 000\ 000\ 000\ 0556 \text{ m}$. 座標系 K (陸上競技場が静止)におけるスプリンターとスタート地点の同時刻 $t = 10 \text{ s}$ が, 座標系 k (スプリンターが静止)においては同時刻ではなく, 「スプリンターの時間 $\tau_{\xi=0}$ 」 $< 10 \text{ s} <$ 「スタート地点の時間 $\tau_{x=0}$ 」. また, 座標系 K においてスプリンターが100 m前進する事象は, 座標系 k において陸上競技場が100.000 000 000 0556 m後退する事象になる.

1.3 双子のパラドックス

ここで、双子のパラドックスについてさきほどの 100m 走の例を[]で併記して考察する. 宇宙旅行する兄 (elder) [スプリンター] の年齢 T_{eld} は地球に残っている弟 (younger) [スタート地点] の年齢 T_{yng} よりも若く, $T_{\text{eld}} < T_{\text{yng}}$ となるが兄eld [スプリンター] が静止する座標系では弟yng [スタート地点] が移動するので $T_{\text{eld}} > T_{\text{yng}}$ となり矛盾するとの論理が双子のパラドックである. しかし, 弟yng [スタート地点] が静止する座標系 K から兄eld [スプリンター] が静止する座標系 k への変換で兄eld [スプリンター] の年齢 T_{eld} は収縮するのに対して弟yng [スタート地点] の年齢 T_{yng} は拡張する. この拡張を見込まず, 座標系 k と座標系 K が対等 (シンメトリー) と誤解していることがパラドックスの要因である. k から K への変換で拡張していた弟yng [スタート地点] の年齢 T_{yng} は収縮するのでパラドックスとはならない.

補足 ミンコフスキー空間の距離

ミンコフスキー空間の距離の2乗 $s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ をスプリンターと陸上競技場のスタート地点の双方で計算すると表-1. ミンコフスキー空間の距離は「スプリンター」と「陸上競技場のスタート地点」で異なるが座標変換では不変である. 「スプリンター[宇宙旅行する兄]」と「陸上競技場のスタート地点[地球に残っている弟]」ではミンコフスキー空間の距離が等しくない所以对等 (シンメトリー) でなく, 固有時 (位置が変化しない時計の時間) が異なる.

表-1 「スプリンター」と「陸上競技場のスタート地点」におけるミンコフスキー空間の距離.

	陸上競技場が静止する座標系 K	スプリンターが静止する座標系 k
スプリンター	$-c^2t^2 + (vt)^2$	$-c^2\tau_{\xi=0}^2 = -c^2\left(\sqrt{1-v^2/c^2}t\right)^2$ $= -c^2t^2 + (vt)^2$
陸上競技場のスタート地点	$-c^2t^2$	$-c^2\tau_{x=0}^2 + \xi_{x=0}^2$ $= -c^2\left(\frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 + \left(\frac{-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2$ $= -c^2t^2$

補足 双子のパラドックスに関する解説書等の誤り

(a) 「宇宙旅行する兄は往復での折り返しがあるから」とする説明は詭弁.

地球に残っている弟yngが静止する座標系で $T_{\text{eld}} < T_{\text{yng}}$, 宇宙旅行する兄eldが静止する座標系 k では $T_{\text{eld}} > T_{\text{yng}}$ となるが, 「折り返し点」で T_{yng} が増加して $T_{\text{eld}} < T_{\text{yng}}$ になる旨の解説がみうけられる. 往復距離が長くなれば, 「折り返し点」で増加する時間をつじつま合わせのように増やすことになる. 論理の誤りを「折り返し点」で粉飾した詭弁.

(b) 「宇宙旅行する兄は加速するから」との説明は不十分.

兄eldと弟yngの違いは加速であり, 加速することが $T_{\text{eld}} < T_{\text{yng}}$ の原因としているが, 等速において $T_{\text{eld}} < T_{\text{yng}}$ となることがパラドックスでないことを説明していない. 加速をすることは時間の進み方が異なる座標系へ移行することである. 加速を考慮した計算は後述する.

1.4 動く棒の長さが縮む相対論効果

座標系 k で静止している長さ $l = 1$ mの棒が座標系 K において速度 v で動く場合の長さ L を計算する (図-3).

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & +v/c^2 \\ +v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7),$$

となるので式(1)の逆変換は,

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & +v/c^2 \\ +v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \xi \end{pmatrix} \quad (8).$$

座標系 k では棒の一方の端を $(\tau, \xi) = (0, 0)$ とし, もう片方を $(\tau, \xi) = (0, l)$ と同時刻にしても式(8)から, 座標系 K においては $t \neq 0$ となり同時刻でなくなる. ここでは座標系 K における同時刻 $t = 0$ を前提とし, この条件を満たすように τ を設定する. 式(1)で $(t, x) = (0, L), \xi = l$ とすれば,

$$\begin{pmatrix} \tau \\ l \end{pmatrix} = \frac{L}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} -v/c^2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9).$$

よって,

$$L = \sqrt{1-v^2/c^2} l \cong \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) l \quad (10),$$

$$\tau = -\frac{v}{c^2} l \quad (11).$$

式(10)から, スプリンターと同じ速度で走っている車の中の $l = 1$ mの棒は, 陸上競技場が静止する座標系 K では $L \cong (1 - (v^2/(2c^2)))l \cong 1 - (5.56 \times 10^{-16}) = 0.999\,999\,999\,999\,999\,444$ m に収縮する.

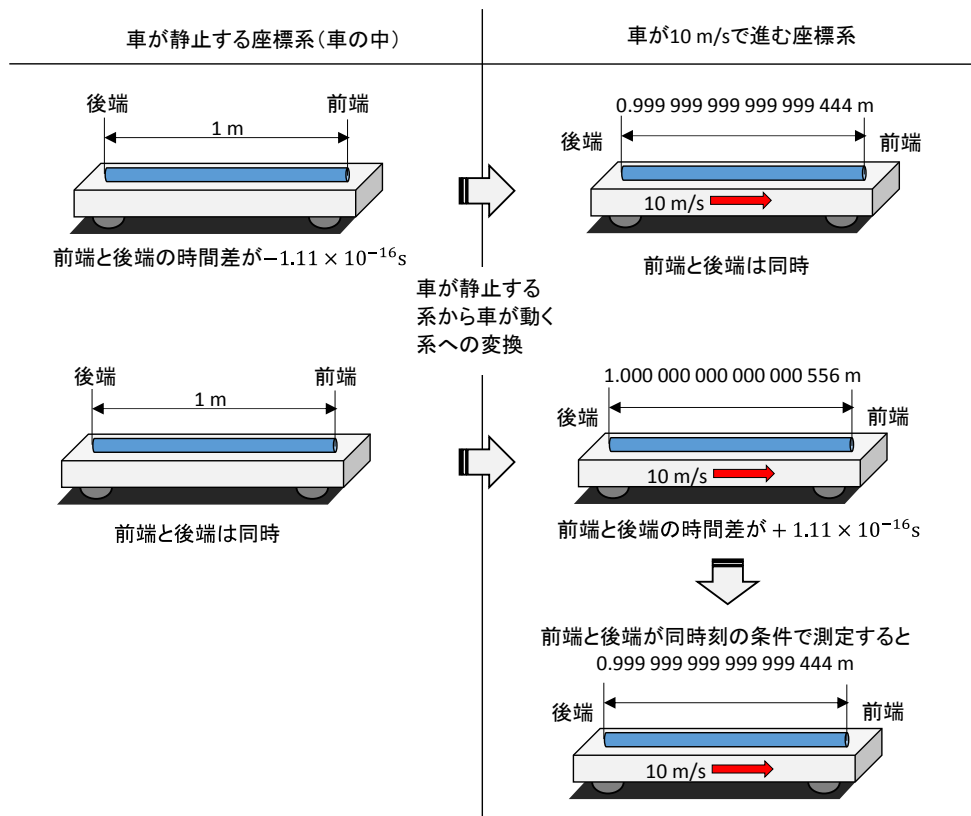


図-3 動く棒の相対論効果.

(いわゆるローレンツ収縮). ここで注意しなければならないのは, 前端と後端の時間差 $\tau = -(v/c^2)l = -1.11 \times 10^{-16}$ s の 1 m の棒は, $1 - (5.56 \times 10^{-16})$ m に収縮するが, 両端が同時の 1 m の棒は, 前端と後端の時間差が 1.11×10^{-16} s の $1 + (5.56 \times 10^{-16})$ m に拡張することである(図-3). **座標系 K での同時刻を前提として距離を比較することは偏った(対等でない, シンメトリーでない.)比較**であり, 長さに関しても双子のパラドックス(弟からみた兄の物差しは短く, 兄からみた弟の物差しも短い.)が生じるように誤解される.

2. 加速を考慮した相対性理論

2.1 計算式

加速を考慮した計算は, 特殊相対性理論で速度 v を変数にすれば可能である. v を変数として扱えるように式(1), 式(2), 式(3)を書き換えると,

$$\begin{pmatrix} d\tau \\ d\xi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c^2 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix} \quad (12),$$

$$\begin{pmatrix} d\tau_{\xi=0} \\ d\xi_{\xi=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-v^2/c^2} dt \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13),$$

$$\begin{pmatrix} d\tau_{x=0} \\ d\xi_{x=0} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \begin{pmatrix} dt \\ -v dt \end{pmatrix} \quad (14),$$

となる. 一定の加速度 a での加速 $v = at$, および $v^2 \ll c^2$ を前提とすると式(13)から,

$$d\tau_{\xi=0} \cong \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt = \left(1 - \frac{a^2 t^2}{2c^2}\right) dt \quad (15),$$

$t = 0$ で $\tau_{\xi=0} = 0$ を条件として積分すると,

$$\tau_{\xi=0} = t - \frac{a^2 t^3}{6c^2} \quad (16),$$

同様にして式(14)から,

$$d\tau_{x=0} \cong \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) dt = \left(1 + \frac{a^2 t^2}{2c^2}\right) dt \quad (17),$$

$$d\xi_{x=0} \cong -v \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) dt = -\left(at + \frac{a^3 t^3}{2c^2}\right) dt \quad (18).$$

$t = 0$ で $\tau_{x=0} = 0$, および $\xi_{x=0} = 0$ を条件として積分すると,

$$\tau_{x=0} \cong t + \frac{a^2 t^3}{6c^2} \quad (19),$$

$$\xi_{x=0} \cong -\frac{a}{2} t^2 - \frac{a^3 t^4}{8c^2} \quad (20).$$

2.2 計算例

スタートから $t_a = 5$ 秒間、等加速度 a で加速 (accelerate) して速度 $v_c = 5a$ に達し、次の $t_c = 5$ 秒間、等速 (constant velocity) で走って 100 m を駆けるスプリンターと陸上競技場の相対論効果を加速区間と等速区間に分けて計算する。相対論効果は、相対論効果を見込まない場合との差とする。

(a) 加速区間

$1/2a \cdot t_a^2 + v_c \cdot t_c = 100$ となることから、 $a = 8/3 \text{ ms}^{-2}$ 。よって、式(16)から、スプリンターでの座標系 k と座標系 K の時間差 $\tau_{\xi=0} - t_a = -a^2 t_a^3 / (6c^2) = -1.65 \times 10^{-15}$ 秒。一方、スタート地点での座標系 k と座標系 K の時間差は式(19)から、 $\tau_{x=0} - t_a = a^2 t_a^3 / (6c^2) = 1.65 \times 10^{-15}$ 秒。座標系 k におけるスタート地点の位置 $\xi_{x=0}$ は相対論効果を見込まないと $-(a/2)t_a^2$ であるが、式(20)より、 $\xi_{x=0} - (-(a/2)t_a^2) = -a^3 t_a^4 / (8c^2) = -1.65 \times 10^{-14} \text{ m}$ の相対論効果が生じる。

(b) 等速区間

式(4)より、座標系 k と座標系 K のスプリンターでの時間差 $\tau_{\xi=0} - t_c \cong -(v_c^2 / (2c^2)) t_c = -4.94 \times 10^{-15} \text{ s}$ 。一方、スタート地点での時間差は式(5)より、 $\tau_{x=0} - t_c = (v_c^2 / (2c^2)) t_c = 4.94 \times 10^{-15} \text{ s}$ 。座標系 k におけるスタート地点の位置 $\xi_{x=0}$ は、相対論効果を見込まないと $-v_c t_c$ であるが、式(6)より、 $\xi_{x=0} - (-v_c t_c) \cong -(v_c^3 / (2c^2)) t_c = -6.58 \times 10^{-14} \text{ m}$ の相対論効果が生じる。

3 まとめ

1. , および 2. の計算結果を表-1 にまとめた。

表-1 100m を 10 秒で駆けるスプリンターと陸上競技場の相対論効果-スプリンターが静止する座標での時間と位置

	100m を 10 秒間の等速で駆ける場合	100m を 5 秒間の等加速と 5 秒間の等速で駆ける場合	
		加速区間と等速区間の合計	
		= 加速区間	+ 等速区間
スプリンターの時間	$10 - (5.56 \times 10^{-15}) \text{ s}$	$10 - (6.59 \times 10^{-15}) \text{ s}$	
スタート地点の時間	$10 + (5.56 \times 10^{-15}) \text{ s}$	$= 5 - (1.65 \times 10^{-15})$	$+ 5 - (4.94 \times 10^{-15}) \text{ s}$
スタート地点の位置	$-100 - (5.56 \times 10^{-14}) \text{ m}$	$-100 - (8.23 \times 10^{-14}) \text{ m}$	
		$= (-100/3) - (1.65 \times 10^{-14})$	$+ (-200/3) - 6.58 \times 10^{-14} \text{ m}$

100m を 10 秒間の等速で駆ける場合よりも等加速 5 秒と等速 5 秒の計 10 秒で駆ける場合の方が等速区間での速度が大きくなるので相対論効果が大きくなる。

付録 重力による相対論効果

(1) スカイツリー

スカイツリーの1階での時間 τ_{0m} と展望台(高低差 $h = 450\text{ m}$)での時間 t_{450m} が重力の影響で異なる相対論効果は図-4のように考えて計算できる。「展望台が静止する座標系 K (時間 t ,位置 x)」と「展望台から重力加速度 $g = 9.8\text{ ms}^{-2}$ で自由落下(free fall)して1階の位置で自由落下の速度が v_{fall} となった座標系 K' (時間 t' ,位置 x')」では時間は一致する. また, 1階が静止する座標系 k は, 座標系 K' に対して速度 $-v_{\text{fall}}$ で移動するとみなせる. よって, 式(4), および $v_{\text{fall}} = (2gh)^{0.5}$ より

$$\tau_{0m} \cong t_{450m} - \frac{(-v_{\text{fall}})^2}{2c^2} t_{450m} = t_{450m} - \frac{gh}{c^2} t_{450m} \quad (21).$$

結果的に重力ポテンシャルでの計算(例えば[2])と整合する. 31日間(1ヶ月)に相当する $t_{450m} = 2.7 \times 10^6\text{ s}$ での展望台と1階の時間差は $t_{450m} - \tau_{0m} \cong ghc^{-2} t_{450m} \cong 1.3 \times 10^{-7}\text{ s}$. この計算値は光格子時計の実験における計算値のマスコミ報道[3]と一致する.

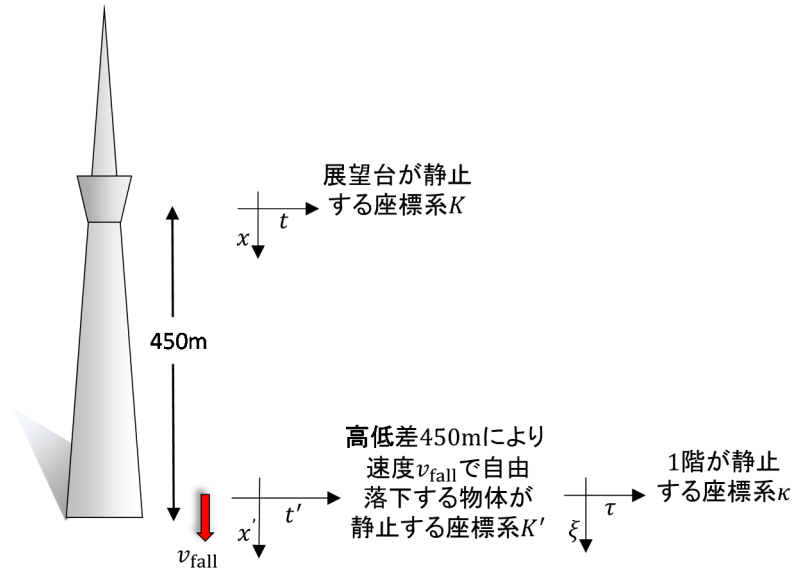


図-4 重力による相対論効果の考え方.

(2) GPS 衛星

同様に地上での時間 T に対する GPS 衛星(米国)での時間 T_{GPS} の進む割合 $(T_{\text{GPS}} - T)/T = \Delta T/T$ を GPS 衛星の公転速度による進み $\Delta T_V/T$ (遅れるので負の値)と地球の重力による進み $\Delta T_G/T$ の和

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_V}{T} + \frac{\Delta T_G}{T} \quad (22),$$

として計算する. 地球の自転速度を考慮すると計算が複雑になること, および地球の自転速度は衛星の公転速度よりも十分に小さいことから地球の自転速度は見込まない. また, ΔT は十分に小さいので $\Delta T/T \cong \Delta T/T_{\text{GPS}}$ とみなす.

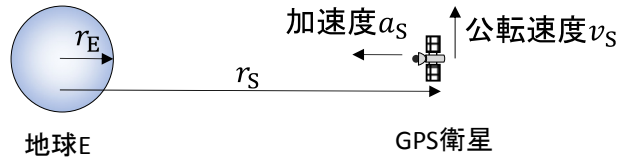


図-5 GPS 衛星の模式図.

a) GPS 衛星の公転速度による時計の進み $\Delta T_V/T$

質量 M_S の衛星 S が半径 R_S , 速度 v_S で質量 M_E の地球に対して公転しているとき (図-5), 万有引力定数を G とした重力 $F = GM_E M_S R_S^{-2}$, 質量 M_S , および加速度 $a_S = v_S^2 R_S^{-1}$ の運動方程式は,

$$GM_E M_S R_S^{-2} = M_S v_S^2 R_S^{-1} \quad (22),$$

式(4)で $t = T$, $\tau_{\xi=0} - t = \Delta T_V$, および $v = v_S$ とすると $\Delta T_V/T \cong -v_S^2/(2c^2)$ となるので, v_S を式(22)で置き換えると,

$$\frac{\Delta T_V}{T} \cong -\frac{GM_E}{2c^2 R_S} \cong -0.83 \times 10^{-10} \quad (23).$$

ここで, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_E = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$, および $R_S = 2.66 \times 10^7 \text{ m}$ とした.

b) 地球の重力による時計の進み $\Delta T_G/T$

地球からの距離 x にある質量 m の物体に作用する重力 $F = -GM_E m x^{-2}$ が, 衛星の公転半径 R_S から地球の半径 R_E の位置まで自由落下する物体に作用する仕事量 $\int F dx$ は落下速度 v_{fall} の運動エネルギーと等しくなるので,

$$\int_{R_S}^{R_E} -GM_E m x^{-2} dx = \frac{1}{2} m v_{\text{fall}}^2 \quad (24).$$

スカイツリーでの計算と同様に考え, 式(4)で $t = T_{\text{GPS}}$, $\tau_{\xi=0} = T$, および $v^2 = v_{\text{fall}}^2$ とすると,

$(T_{\text{GPS}} - T)/T_{\text{GPS}} \cong v_{\text{fall}}^2/(2c^2)$. 左辺の $(T_{\text{GPS}} - T)/T_{\text{GPS}} \cong \Delta T_G/T$ とし, 右辺の v_{fall} を式(24)で置き換え積分を計算すると,

$$\frac{\Delta T_G}{T} \cong \frac{GM_E}{c^2} \left(-\frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_E} \right) \cong 5.28 \times 10^{-10} \quad (25).$$

ここで, $R_E = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ とした.

c) GPS 衛星での時計の進み

以上より, GPS 衛星での時計の進みは

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_V}{T} + \frac{\Delta T_G}{T} = (-0.83 \times 10^{-10}) + (5.28 \times 10^{-10}) = 4.45 \times 10^{-10} \quad (26),$$

となり, 衛星から周波数 f で送信した電波の周波数の増加 Δf は $\Delta f/f = -4.45 \times 10^{-10}$ となる(周波数は時間の逆数なので正負が反転). 解説書[4]では上記と同様な簡易な計算で $\Delta f/f = -4.464 \times 10^{-10}$ としており, 式(26)の計算値は整合する. また, 文献[5]に記載された GPS 衛星 NTS-2 での時間の進みの計算値 445.0×10^{-12} , および測定値 442.5×10^{-12} ともよく整合する. 文献[5]には GPS 衛星の信号の周波数のずれ (offset) を相対論効果の補正で縮小した旨が記載されている.

補足: 大気と自転がない星の地上すれすれの位置を公転する衛星の場合

式(25)より, 大気がない星の地上すれすれの位置 $R_S \cong R_E$ を公転する衛星の場合には重力による進み $\Delta T_G/T \cong 0$ となり, この星の自転がなければ, $\Delta T/T \cong \Delta T_V/T \cong -GM_E/(2c^2 R_E)$ となり, 衛星の時計のずれは公転速度による遅れ

$$\Delta T \cong \Delta T_V \cong -\frac{GM_E}{2c^2 R_E} T \quad (27),$$

のみとなる. 衛星の時計の遅れ $-\Delta T$ は経過時間 T に比例して増え, 「双子のパラドックス」の論理のように「衛星から観測すると地上の時計が遅れる」ということはない.

References

- [1] A. Einstein: Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik, **17**, 891 (1905) [in German]. (web site で英訳を入手).
- [2] 石井俊全: 一般相対性理論を一步一步数式で理解する, ベレ出版.
- [3] NHK: 展望台の時計 地上より早く進む? スカイツリーで実験, 2018.10.03.
- [4] B.ホフマン-ウェレンホフ, H.リヒテネガー, J.コリンズ, 西修二郎(訳): GPS 理論と応用, 丸善出版.
- [5] James A. Buisson, Roger L. Easton, Thomas B. McCaskill; INITIAL RESULTS OF THE NAVSTAR GPS NTS-2 SATELLITE, Proceedings of the 9th Annual Precise Time and Time Interval Applications and Planning Meeting, 177-199, 1977. (web site で入手).