

# Refutation of the twin paradox by considering expansion in Lorentz transformation

ローレンツ変換での拡張を考慮した  
双子のパラドックスの反駁

Hiroshi Yoshinaga

Tsukuba-shi, Ibaraki 305-0024, Japan

E-mail: 01@a.nifty.jp, web site: yoshi-naga.jp

Numerous attempts have been made to refute the twin paradox associated with Einstein's special theory of relativity. However, none of these, including Einstein's answer, have made the essential puzzle clear; namely, 'the Earth's clock would either lose time or not lose time, if we assume that the rocket is stationary and the Earth moves.' The following claim is discussed in this paper: although the moving Earth's clock would lose time at the same rate, the time course would be equal to the time course which we would assume if the Earth were stationary, because **the distance traveled by the moving Earth would be extended by Lorentz transformation if we assume the rocket to be stationary**. In the end, the relativity not only of the clock speed but of the travel distance must be considered in Lorentz transformation. By considering the expansion of time and length in Lorentz transformation that everyone overlooked, the twin paradox is easily resolved. It is described using simple equations and simple case studies.

アインシュタインの特殊相対性理論にかかる双子のパラドックスに対する反駁は数多くある。しかし、「ロケットが静止し地球が動く仮定すると地球の時計が遅れるか否か。」という本質的な間にはアインシュタイン自身も答えていない。この論文では、**ロケットが静止していると仮定すると動く地球の時計も同じ割合で遅れるが、動く地球が移動する距離はローレンツ変換によって拡大される**ので、地球が静止すると仮定した場合と時間経過が同じになることについて述べる。すなわち、時計の速度だけでなく移動距離の相対性もローレンツ変換で考慮する必要がある。誰もが見落としていたローレンツ変換での時間と長さの拡張を考えると、双子のパラドックスは簡単に解消できる。以上を簡素な式と簡素なケーススタディで説明した。

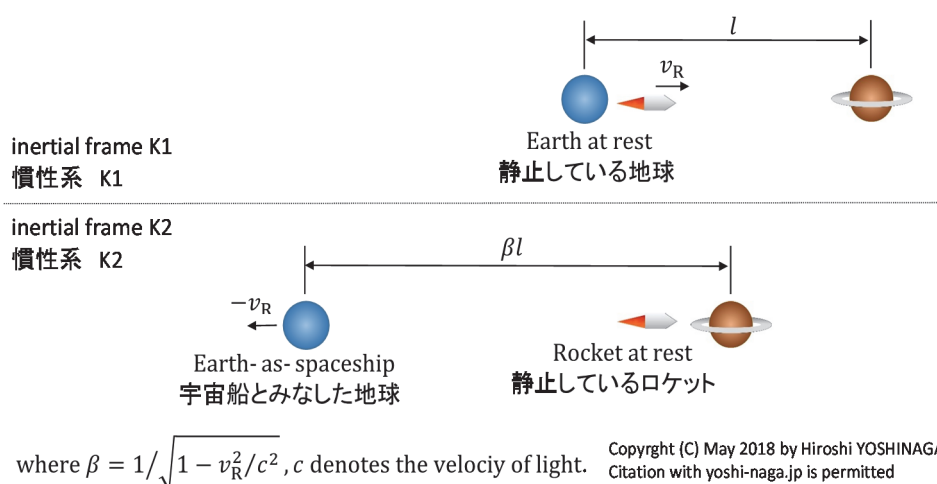
**Keywords:** twin paradox, clock paradox, theory of relativity, special relativity, Lorentz transformation, inertial frame, relativity of length, relativity of clock speed, relativity of time course, Lorentz expansion

# 1. Introduction

Numerous attempts have been made to refute the twin paradox associated with Einstein's special theory of relativity<sup>1)</sup>. However, none of these, including Einstein's answer<sup>2)</sup>, have made the essential puzzle clear; namely, 'the Earth's clock would either lose time or not lose time, if we assume that the rocket is stationary and the Earth moves.' The following claim is discussed in this paper: although the moving Earth's clock would lose time at the same rate, the time course would be equal to the time course which we would assume if the Earth were stationary, because **the distance traveled by the moving Earth would be extended by Lorentz transformation if we assume the rocket to be stationary** (see Fig. 1.). In the end, the relativity not only of the clock speed but of the travel distance must be considered in Lorentz transformation. **By considering the expansion of time and length in Lorentz transformation that everyone overlooked, the twin paradox is easily resolved.**

## 1. はじめに

アインシュタインの特殊相対性理論<sup>1)</sup>にかかる双子のパラドックスに対する反駁は数多くある。しかし、「ロケットが静止し地球が動く仮定すると地球の時計が遅れるか否か。」という本質的な間にはアインシュタイン自身も答えていない<sup>2)</sup>。この論文では、ロケットが静止していると仮定すると動く地球の時計も同じ割合で遅れるが、動く地球が移動する距離がローレンツ変換によって拡大される (Fig. 1 参照) ので、地球が静止すると仮定した場合と時間経過が同じになることについて述べる。すなわち、時計の速度だけでなく移動距離の相対性もローレンツ変換で考慮する必要がある。ローレンツ変換における時間と長さの拡張 (誰もが見落としていた。) を考慮すると、双子のパラドックスは簡単に解消できる。



**Fig. 1.** Expansion of distance by converting the inertial frame K1 where the earth is stationary into the inertial frame K2 where the rocket is stationary by Lorentz transformation (schematic figure).

**Fig. 1.** 地球が静止している慣性系 K1 をロケットが静止している慣性系 K2 にローレンツ変換することによる距離の拡張(模式図).

It is described using simple equations and simple case studies in this paper. **The effects of acceleration and gravity are not considered.** To understand the essentials of the special theory of relativity, they are not needed, **because as the travel distance becomes long, these effects become relatively small.** There are explanations in books and web sites that the time of the Earth-as-spaceship ( or the twin's clock stayed at the Earth ) would go discontinuously at turning points of round trips if we assume the rocket to be stationary, however, the time discontinuity comes from the wrong turning points mistakenly shortened.

本論文では簡素な式と簡素なケーススタディで説明する。加速と重力の影響は考慮していない。移動距離が長くなれば、これらの影響は相対的に小さくなるので、特殊相対性理論の本質を理解するためには必要ない。ロケットが止まっていると仮定すると Earth-as-spaceship ( 宇宙船地球号 ) の時間 ( または、地球に残った双子の時計 ) が、往復旅行の折り返し点で不連続に進む旨の説明が書籍、および web site に見受けられるが、時間が不連続になる原因は、間違っ短くした折り返し点に起因する。

## 2. Presuppositions, etc.

The presuppositions, etc., in this paper are as follows.

- 1) ‘Lorentz transformation’ is the transformation of coordinates and times from one inertial frame system to another, in Einstein’s special theory of relativity. ‘Galilean transformation’ is also described, to differentiate it from Lorentz transformation.
- 2) Only one direction,  $x$ , among the three dimensions of  $x, y, z$ , is selected to describe locations. The time  $t$  and location  $x$  of a point  $P_i$  is described as  $(t, x)$  or  $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ .
- 3) The difference between  $P_i$ , and  $P_j$  (where  $i$  and  $j$  are indices denoting individual points) is described as  $\Delta P = P_i - P_j = (\Delta t, \Delta x)$ , where  $\Delta t$  and  $\Delta x$  denote the time course and difference in location, respectively.
- 4) **Galilean and Lorentz transformations are applied to  $\Delta P$ .** It should be noted that the equations in the special theory of relativity are modified in this paper; however, the essential import of the equations is not changed.
- 5) ‘Motion of the Earth’ denotes neither the Earth’s orbital rotation around the sun, nor its axial rotation, but rather, extremely high speed uniform linear motion, as is relevant to the special theory of relativity.

## 2. 前提条件等

本論文では以下を前提条件等とした。

- 1) 「ローレンツ変換」は、アインシュタインの特殊相対性理論における、ある慣性系から別の慣性系への座標と時間の変換である。ローレンツ変換との違いを示すために「ガリレイ変換」も併記した。
- 2) 位置を示す座標は $x, y, z$ の3つの次元のうちの $x$ のみとした。点 $P_i$ の時間 $t$ および位置 $x$ は $(t, x)$ または $\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$ と表記した。
- 3)  $P_i$ と $P_j$ の差 ( $i$  と  $j$  は個々の点を示すインデックス) は、 $\Delta P = P_i - P_j = (\Delta t, \Delta x)$ とした。ここで $\Delta t$ および $\Delta x$ は、時間経過および位置の差。
- 4) ガリレイ変換とローレンツ変換で $\Delta P$ を変換する。この論文では、特殊相対性理論の式を書き換えているが、式の本質的な意味は変えていない。
- 5) 「地球の動き」は、太陽の周りの公転や自転ではなく、特殊相対性理論にかかわるような非常に高速かつ一定の線形運動を意味する。

## 3. Galilean Transformation and Lorentz Transformation

First, Galilean and Lorentz transformation will be distinguished. The equations which transform  $(\Delta t_{K1}, \Delta x_{K1})$  in inertial frame K1 to  $(\Delta t_{K2}, \Delta x_{K2})$  in inertial frame K2, which moves at the constant velocity  $v_C$ , in the direction of increasing  $x_{K1}$  in K1, are:

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K2\_G} \\ \Delta x_{K2\_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (1),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K2\_L} \\ \Delta x_{K2\_L} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & -v_C/c^2 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (2),$$

$$\beta = 1/\sqrt{1 - v_C^2/c^2} \quad (3),$$

where  $c$  denotes the velocity of light. The subscripts “\_G”, and “\_L” denote Galilean and Lorentz transformation, respectively.

Since  $(\Delta t_{K1}, 0)$  is a stationary point in K1,  $\Delta x_{K2}/\Delta t_{K2}$  obtained by substituting  $(\Delta t_{K1}, 0)$  into **Eqs. (1)** and **(2)** are the velocities of K1 in K2. The velocity is equal to  $-v_C$  in both transformations. The equations of transformations from K2 to inertial frame K3, which move at the constant velocity  $-v_C$ , in the direction of increasing  $x_{K2}$  in K2, are:

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3\_G} \\ \Delta x_{K3\_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K2\_G} \\ \Delta x_{K2\_G} \end{pmatrix} \quad (4),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3\_L} \\ \Delta x_{K3\_L} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & +v_C/c^2 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K2\_L} \\ \Delta x_{K2\_L} \end{pmatrix} \quad (5).$$

The matrices in **Eq. (1)** vs. **Eq. (4)** and **Eq. (2)** vs. **Eq. (5)** are the inverse of each other, as:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +v_c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_c & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (6),$$

$$\beta \begin{pmatrix} 1 & +v_c/c^2 \\ +v_c & 1 \end{pmatrix} = \left[ \beta \begin{pmatrix} 1 & -v_c/c^2 \\ -v_c & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (7).$$

Thus, we obtain **Eq. (8)** from **Eqs. (1), (4), and (6)**. Furthermore we obtain **Eq. (9)** from **Eqs. (2), (5), and (7)**:

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3\_G} \\ \Delta x_{K3\_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (8),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3\_L} \\ \Delta x_{K3\_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (9).$$

**Eq. (9) implies a refutation of the twin paradox**, as illustrated by several case studies in §4.

In addition, the changing rate of the clock speed obtained by dividing **Eq. (2)** by  $\Delta t_{K1}$  is:

$$\frac{\Delta t_{K2\_L}}{\Delta t_{K1}} = \beta \left( 1 - v_c/c^2 \frac{\Delta x_{K1}}{\Delta t_{K1}} \right) \quad (10).$$

**Eq. (10)** varies as a function of  $v_c$  and  $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$ , which denotes the velocity of an object moving in K1. If  $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$  in **Eq. (10)** equals  $v_c$ , **Eq. (11)**, expressing the delay in the traveler's clock, is obtained;

$$\frac{\Delta t_{K2\_L}}{\Delta t_{K1}} = 1/\beta \quad (11),$$

whereas, if  $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$  in **Eq. (10)** equals 0, which denotes a stationary point in K1, **Eq. (12)**, expressing the expansion of the time course in Lorentz transformation, is obtained;

$$\frac{\Delta t_{K2\_L}}{\Delta t_{K1}} = \beta \quad (12).$$

### 3. ガリレイ変換とローレンツ変換

まず, ガリレイ変換とローレンツ変換の違いを示す. 慣性系 K1 の  $(\Delta t_{K1}, \Delta x_{K1})$  を K1 の  $x_{K1}$  の正方向に一定速度  $v_c$  で移動する慣性系 K2 の  $(\Delta t_{K2}, \Delta x_{K2})$  に変換する式は,

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K2\_G} \\ \Delta x_{K2\_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (1),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K2\_L} \\ \Delta x_{K2\_L} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & -v_c/c^2 \\ -v_c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (2),$$

$$\beta = 1/\sqrt{1 - v_c^2/c^2} \quad (3),$$

ここで,  $c$  は光の速度を示す. 添え字の「\_G」および「\_L」は, それぞれガリレイ変換およびローレンツ変換を示す.

$(\Delta t_{K1}, 0)$ は K1 の静止点なので、 $(\Delta t_{K1}, 0)$ を式(1), および(2)に代入して得られる $\Delta x_{K2}/\Delta t_{K2}$ は K2 における K1 の速度である. 速度は両変換で $-v_C$ となり等しい. K2 から K2 の $x_{K2}$ の正方向に一定速度 $-v_C$ で移動する慣性系 K3 への変換の式は,

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3\_G} \\ \Delta x_{K3\_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K2\_G} \\ \Delta x_{K2\_G} \end{pmatrix} \quad (4),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3\_L} \\ \Delta x_{K3\_L} \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 & +v_C/c^2 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t_{K2\_L} \\ \Delta x_{K2\_L} \end{pmatrix} \quad (5).$$

Eq. (1) と Eq. (4), および Eq. (2) と Eq. (5) の行列は互いに次のように逆行列である.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (6),$$

$$\beta \begin{pmatrix} 1 & +v_C/c^2 \\ +v_C & 1 \end{pmatrix} = \left[ \beta \begin{pmatrix} 1 & -v_C/c^2 \\ -v_C & 1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \quad (7).$$

よって, Eqs. (1), (4), および (6) から Eq. (8) が得られる. さらに, Eqs. (2), (5), および (7) から Eq. (9) が得られる.

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3\_G} \\ \Delta x_{K3\_G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (8),$$

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{K3\_L} \\ \Delta x_{K3\_L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t_{K1} \\ \Delta x_{K1} \end{pmatrix} \quad (9).$$

Eq. (9)は, §4 のケーススタディで示すように双子のパラドックスに対する反駁を意味する.

補足しておくが, Eq. (2) を  $\Delta t_{K1}$  で割ることにより得られる時計の速さの変換率は,

$$\frac{\Delta t_{K2\_L}}{\Delta t_{K1}} = \beta \left( 1 - v_C/c^2 \frac{\Delta x_{K1}}{\Delta t_{K1}} \right) \quad (10).$$

Eq. (10)は  $v_C$  と  $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$  の関数である.  $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$ は K1 で移動する物体の速度を表す. Eq. (10)の $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$ が $v_C$ なら, 旅行者の時計の遅れを表す Eq. (11)が得られる.

$$\frac{\Delta t_{K2\_L}}{\Delta t_{K1}} = 1/\beta \quad (11),$$

一方, Eq. (10)の $\Delta x_{K1}/\Delta t_{K1}$ が, K1 での静止点を意味する 0 なら, ローレンツ変換による時間経過の拡張を表す Eq. (12)が得られる.

$$\frac{\Delta t_{K2\_L}}{\Delta t_{K1}} = \beta \quad (12).$$

## 4. Case Studies

### 4.1 Outline

As aforementioned, Eq. (9) implies a refutation of the twin paradox. To illustrate this, several

case studies, which assume the velocity  $v_C = \pm c/2$  in Lorentz transformation, will be discussed. Space travel at  $c/2$  may never actually be possible, however, the velocity is reasonable for the purpose, because here the difference from Galilean transformation is obvious and moderate. The principle of the constancy of the velocity of light, and the relativity of simultaneity, of length, and of time course will first be discussed, before discussing the time course during virtual space travel and refutation of the twin paradox. In the case studies, the units of length and time are meter and second. The  $\beta$  in **Eq. (3)** is  $\beta = 1/\sqrt{0.75} \cong 1.15$ , and  $1/\beta \cong 0.86$ .

#### 4. ケーススタディ

##### 4.1 概要

前述したように、**Eq. (9)** は双子のパラドックスに対する反駁を意味する。このことを説明するために、ローレンツ変換で速度  $v_C = \pm c/2$  を仮定するケーススタディについていくつか述べる。現実には  $c/2$  での宇宙旅行は実現不可能かもしれないが、ガリレイ変換との違いが明らかで程よいので、説明に適している。仮想的な宇宙旅行での時間経過と双子のパラドックスに対する反駁について述べる前に、まず、光速度の不変の原理、ならびに同時性、長さ、および時間経過の相対性について述べる。ケーススタディでは、長さと時間の単位はメートルと秒とする。**Eq. (3)** の  $\beta$  は、 $\beta = 1/\sqrt{0.75} \cong 1.15$  と  $1/\beta \cong 0.86$  になる。

Some transformed cases of  $\Delta P_{i,j}$  are shown in **Table I**. The  $\Delta P_{i,j}$  are transformed from K1 to K2, and then transformed from K2 to K3, at the relative velocity  $v_C$ . The positive/negative values of  $v_C$  for  $\Delta P_{6,5}$  are the inverse of those for  $\Delta P_{5,0}$ , because the return trip of  $\Delta P_{5,0}$  is assumed in  $\Delta P_{6,5}$ . The  $\sum \Delta P$  is the sum of  $\Delta P_{5,0}$ , and  $\Delta P_{6,5}$ . The meanings of these transformations are explained in §4.2-4.4.

$\Delta P_{i,j}$  のいくつかの変換事例を **Table I** に示す。 $\Delta P_{i,j}$  は K1 から K2, そして K2 から K3 に速度  $v_C$  で変換している。 $\Delta P_{6,5}$  では、 $\Delta P_{5,0}$  の帰路を仮定しているので、 $v_C$  の正負が  $\Delta P_{5,0}$  と逆である。 $\sum \Delta P$  は  $\Delta P_{5,0}$  と  $\Delta P_{6,5}$  を合計したものである。これらの変換の意味は §4.2-4.4. で説明する。

**Table I.** Galilean and Lorentz transformations of  $\Delta P$  (Time course, Difference in location).

**Table I.**  $\Delta P$  (時間経過, 位置の差) のガリレイ変換とローレンツ変換.

$\Delta P_{i,j}$ or $\sum \Delta P$	K1	Transformation from K1 to K2 with velocity $v_c$		Transformation from K2 to K3 with velocity $v_c$		
		$v_c$	K2_G Galilean	K2_L Lorentz	$v_c$	K3_G Galilean
$\Delta P_{0,0} = P_0 - P_0$	(0,0)	+c/2	(0,0)	(0,0)	-c/2	(0,0)
$\Delta P_{1,0} = P_1 - P_0$	(1,c)		(1,0.5c)	(0.58,0.58c)		(1,c)
$\Delta P_{2,0} = P_2 - P_0$	(1,-c)		(1,-1.5c)	(1.73,-1.73c)		(1,-c)
$\Delta P_{3,0} = P_3 - P_0$	(0,c)		(0,c)	(-0.58,1.15c)		(0,c)
$\Delta P_{4,0} = P_4 - P_0$	(2,0)		(2,-c)	(2.31,-1.15c)		(2,0)
$\Delta P_{5,0} = P_5 - P_0$	$t_{\text{trp}}(2,c)$		$t_{\text{trp}}(2,0)$	$t_{\text{trp}}(1.73,0)$		$t_{\text{trp}}(2,c)$
$\Delta P_{6,5} = P_6 - P_5$	$t_{\text{trp}}(2,-c)$	-c/2	$t_{\text{trp}}(2,0)$	$t_{\text{trp}}(1.73,0)$	+c/2	$t_{\text{trp}}(2,-c)$
$\sum \Delta P$ $= \Delta P_{5,0} + \Delta P_{6,5}$	$t_{\text{trp}}(4,0)$	-	$t_{\text{trp}}(4,0)$	$t_{\text{trp}}(3.46,0)$	-	$t_{\text{trp}}(4,0)$

#### 4.2 Principle of the constancy of the velocity of light

The  $\Delta P_{1,0}$  in **Table I** means that the velocity of light in K1 is  $+c$ . Though the velocity in K2\_G is changed to  $0.5c$ , the velocity in K2\_L is  $0.58c/0.58 = c$ . The  $\Delta P_{2,0}$  means that the velocity of light in K1 is  $-c$ . Though the velocity in K2\_G is changed to  $-1.5c$ , the velocity in K2\_L is  $-1.73c/1.73 = -c$ . K3 transformed from both K2\_G and K2\_L accords with the original K1. The above is represented in **Fig. 2**, where the horizontal and vertical axes represent the time and location, respectively, and the positive and negative velocities of light,  $c$  and  $-c$ , are represented by solid arrows and dotted arrows, respectively. The graphs of K1, K2, and K3 are arranged left to right, with the Galilean and Lorentz transformations on the top and bottom, respectively. Though the slopes of the arrows representing the velocity of light change in K2\_G, they do not change in K2\_L.

#### 4.2 光速度不変の原理

**Table I** の  $\Delta P_{1,0}$  は K1 での光速が  $+c$  であることを意味する。K2\_G での光速は  $0.5c$  に変わるが、K2\_L での光速は  $0.58c/0.58 = c$  である。 $\Delta P_{2,0}$  は K1 での光速が  $-c$  であることを意味する。K2\_G での光速は  $-1.5c$  に変わるが、K2\_L での光速は  $-1.73c/1.73 = -c$  である。K2\_G と K2\_L から変換された K3 は、ともに元の K1 と一致する。以上を **Fig. 2** に示す。水平軸および垂直軸はそれぞれ時間および位置を表し、光の正負の速度  $c$  および  $-c$  は、それぞれ実線および



び点線の矢印で示した。K1, K2, およびK3 のグラフは左から右の順に配置し、ガリレイ変換とローレンツ変換はそれぞれ上側および下側に配置した。光の速度に相当する矢印の傾きはK2\_G では変化するがK2\_L では変化しない。

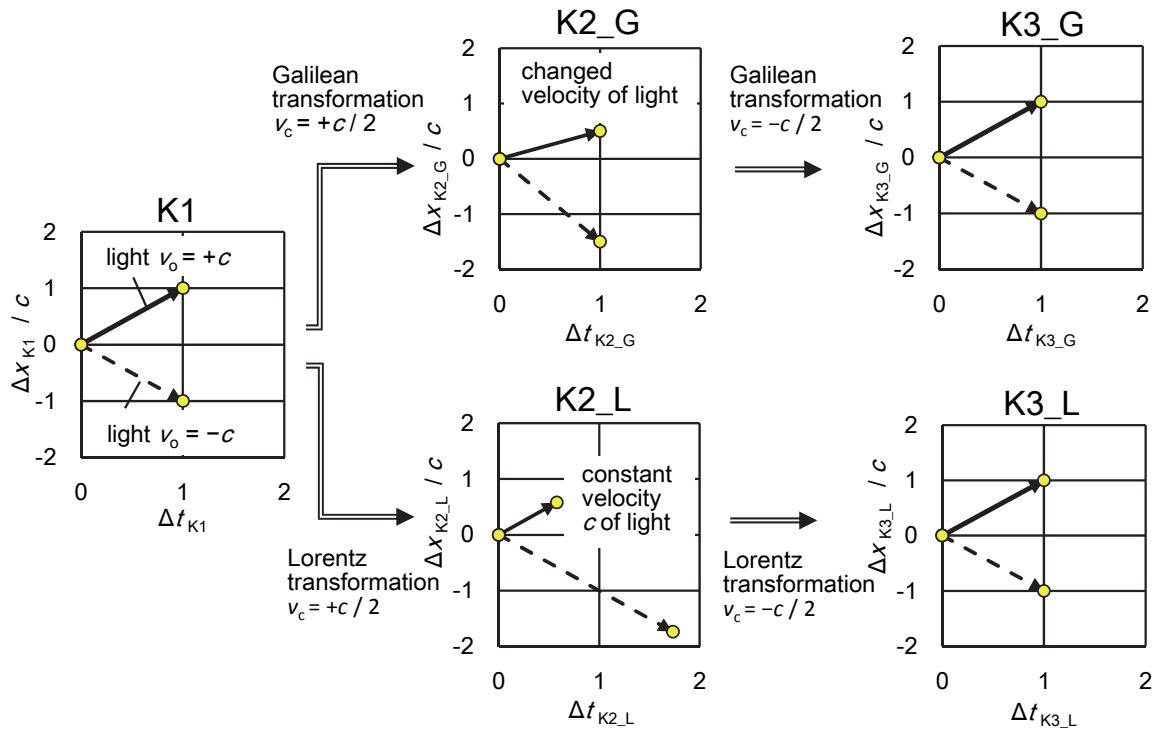


Fig. 2. Transformed time and location of light.

Fig. 2. 光の時間と位置の変換.

### 4.3 Relativity of simultaneity, length and time course

The  $\Delta P_{3,0}$  values in **Table I** show that 0 sec (as simultaneity) and length of  $c$  m in K1 are transformed to  $-0.58$  s and  $1.15c$  m in K2\_L, while these changes do not occur in K2\_G. The  $\Delta P_{4,0}$  values in **Table I** show the time course of a stationary point in K1, with 2 s in K1 changing to 2.31 s in K2\_L.

### 4.3 同時、長さ、および時間経過の相対性

**Table I** の  $\Delta P_{3,0}$  は、K1 における 0 秒 (すなわち同時) で長さ  $c$  m が K2\_L では  $-0.58$  秒と  $1.15c$  m に変換されることを示す。このような変化は K2\_G では起こらない。**Table I** の  $\Delta P_{4,0}$  は、K1 での静止点の 2 秒が K2\_L では 2.31 秒に変換されることを示す。

### 4.4 Time course during virtual space travel

Here we consider a virtual round-trip space journey by a rocket from Earth to Planet A,

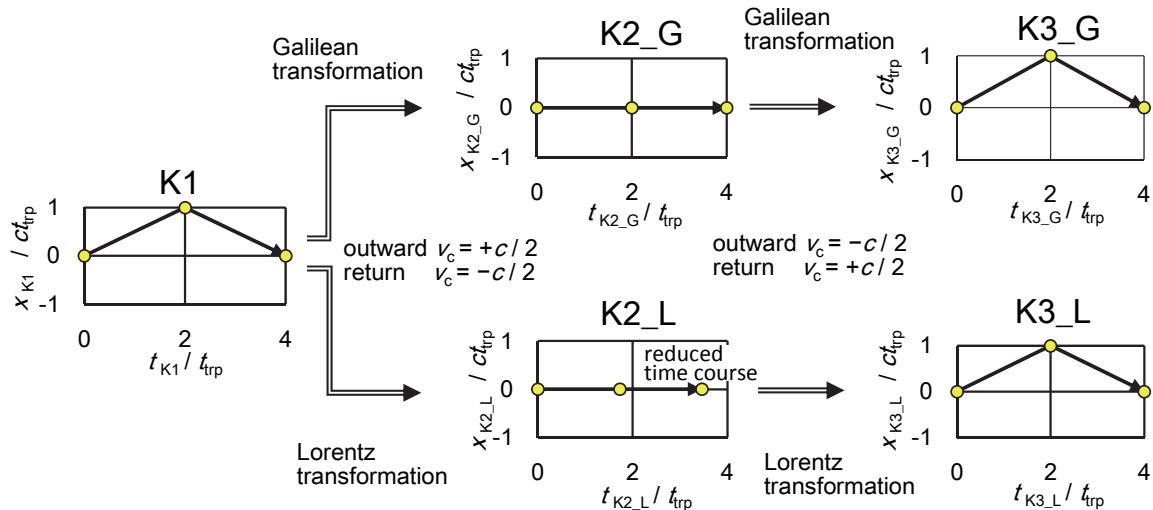
located  $l = t_{\text{trp}} \cdot c$  away from the Earth, at the velocity  $v_R = c/2$ . If  $v_C$ , which is the velocity of the inertial frame K2 in K1, equals  $v_R$ , the rocket is stationary in K2. The effects of acceleration and gravity are not considered. To understand the essentials of the special theory of relativity, they are not needed, because as the distance becomes long, these effects become relatively small.

The  $\Delta P_{5,0}$  in **Table I** indicates the outward journey. The time course in K1 is  $2t_{\text{trp}}$ , while the time course in K2\_L, which means the time course in the rocket, is reduced to  $2t_{\text{trp}}/\beta = 1.73t_{\text{trp}}$ . This change does not occur in K2\_G. However, the  $1.73t_{\text{trp}}$  in K2\_L is recovered to  $2t_{\text{trp}}$  in K3. The time courses in K1 and K3 mean the time course of the clock in the Earth at rest and the time courses of the clock in the Earth-as-spaceship.  $\Delta P_{6,5}$  means the return journey with the velocity  $v_R = -c/2$ . Here, the  $2t_{\text{trp}}$  in K1 is also reduced, to  $1.73t_{\text{trp}}$  in K3\_L. The time  $\sum\Delta P$  in **Table I** means the time course over the round-trip. The time courses in K1, K2\_G, and K3 are  $4t_{\text{trp}}$ , while the time course in K2\_L is reduced to  $4t_{\text{trp}}/\beta = 3.46t_{\text{trp}}$ . The above is represented in **Fig. 3**, with the location of the rocket represented by the vertical axis and the time represented by the horizontal axis. The rocket is at rest in both K2\_G and K2\_L. Though the time course in K2\_L is reduced, it is recovered in K3.

#### 4.4 仮想的な宇宙旅行での時間経過

ここでは、地球からの距離が  $l = t_{\text{trp}} \cdot c$  の惑星 A への速度  $v_R = c/2$  のロケットによる仮想的な往復の宇宙旅行を考察する。慣性系 K1 での慣性系 K2 の速度  $v_C$  が  $v_R$  に等しい場合、ロケットは K2 で静止している。加速と重力の影響は考慮しない。距離が長くなるにつれてこれらの影響は相対的に小さくなるため、特殊相対性理論の本質を理解するためには必要ない。

**Table I** の  $\Delta P_{5,0}$  は往路を示す。K1 での時間経過は  $2t_{\text{trp}}$  であり、ロケットでの時間経過を意味する K2\_L での時間経過は  $2t_{\text{trp}}/\beta = 1.73t_{\text{trp}}$  に減少する。このような変化は K2\_G では起こらない。しかし、K2\_L での  $1.73t_{\text{trp}}$  は K3 では  $2t_{\text{trp}}$  に戻る。K1 および K3 での時間経過は、静止した地球での時間経過、および Earth-as-spaceship 内での時間経過を意味する。 $\Delta P_{6,5}$  は速度  $v_R = -c/2$  での復路を意味する。ここでも K1 での  $2t_{\text{trp}}$  は  $1.73t_{\text{trp}}$  に減少する。**Table I** の  $\sum\Delta P$  の時間は往復旅行での時間経過を意味する。K1, K2\_G, および K3 での時間経過は  $4t_{\text{trp}}$  であるが、K2\_L では  $4t_{\text{trp}}/\beta = 3.46t_{\text{trp}}$  に減少する。以上についてロケットの位置を横軸、時間を縦軸とした **Fig. 3** に示す。K2\_G および K2\_L ではロケットは静止している。K2\_L では時間経過が減少するが、K3 では元に戻る。



**Fig. 3.** Space travel at 1/2 the velocity of light.

**Fig. 3.** 光速の 1/2 の速度での宇宙旅行。

#### 4.5 Refutation of the twin paradox

A fundamental refutation of the twin paradox will now be discussed, based on the case studies in §4.1 and 4.4. The schematic in Fig. 4 shows the Earth as the point of departure, Planet A as the turning point, and the rocket in flight. Only the outward journey is represented in Fig. 4, because the return is similar to this as described in §4.4. The horizontal and vertical axes represent the time and location, respectively. Lorentz transformation with velocity  $v_c$  is abbreviated to  $L(v_c)$ .

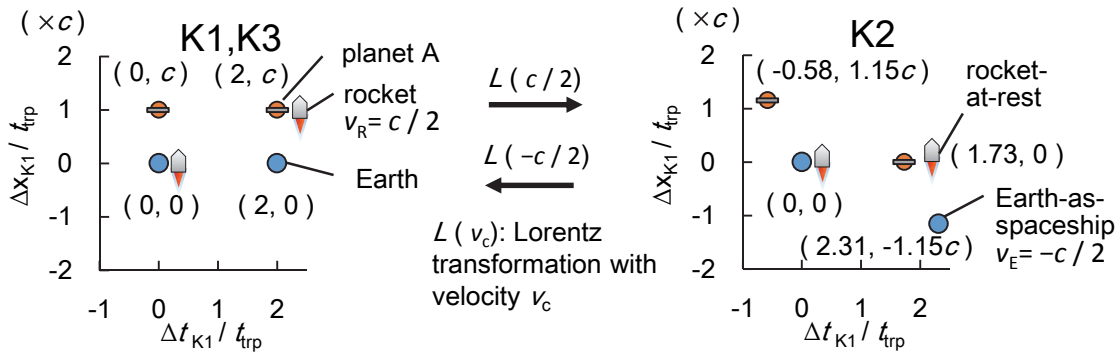
In the inertial frame system K1 (left in Fig. 4), the Earth is stationary. K1 is transformed to the inertial frame system K2 by  $L(c/2)$  (right). We can assume, in K2, that the Earth-as-spaceship is launched in the opposite direction to Planet A, with velocity  $v_E = -c/2$ . K2 is transformed to K3 by  $L(-c/2)$ . K3 matches K1 (left), because contractions and expansions return completely by the transformation with the positive / negative inverse velocity. **The essence of the twin paradox refutation lies in the difference between the rocket in K1 and the Earth-as-spaceship in K2 in Fig. 4.** It is Fig. 1 that made it more schematic.

#### 4.5 双子のパラドックスに対する反駁

§4.1 および 4.4 でのケーススタディに基づいて、双子のパラドックスに対する本質的な反駁を述べる。Fig. 4 の模式図は、出発点としての地球、折り返し点としての惑星 A、および飛び立つロケットを示す。Fig. 4 では往路しか示していないのは、§4.4 で示したように復路も同様であるからである。横軸、および縦軸はそれぞれ時間と位置を示す。速度  $v_c$  でのローレンツ変換は  $L(v_c)$  と略記した。

慣性系 K1(Fig. 4 の左)では地球は静止している。K1 は  $L(c/2)$  によって慣性系 K2 に変換さ

れる(右). K2 では Earth-as-spaceship は惑星 A と反対方向に速度  $v_E = -c/2$  で旅立つとみなせる. K2 は  $L(-c/2)$  によって K3 に変換される. 正負が逆の速度の変換で収縮と拡張は完全に元に戻るの K3 は K1 と一致する(左). 双子のパラドックスに対する反駁の本質は Fig. 4 の K1 でのロケットと K2 の Earth-as-spaceship の違いにある. より模式的にしたのが Fig. 1 である.



**Fig. 4.** Transformation to an inertial frame system in which the Earth-as-spaceship moves at  $1/2$  the velocity of light, and a rocket is stationary (schematic figure).

**Fig. 4.** Earth-as-spaceship が光速の  $1/2$  の速度で進み, ロケットが静止する系への変換(模式図).

Here we reconsider the time course of the journey of distance  $l$  in three inertial frames K1, K2, and K3.

(1) In K1: The rocket arrives at Planet A in  $T_{K1} = l/v_R (= 2t_{trp})$ .

(2) In K2: The rocket is at rest. The distance  $l$  is increased to  $l_{K2} = l\beta (= 1.15ct_{trp})$ ,  $T_{K1}$  is reduced to  $T_{K2\_R} = T_{K1}/\beta (= 1.73t_{trp})$  at the rocket-at-rest, and  $T_{K1}$  is increased to  $T_{K2\_E} = T_{K1}\beta (= 2.31t_{trp})$  at the Earth-as-spaceship. These differences do not reflect a contradiction but rather the **relativity of length and time course**, as explained in §4.1 and 4.3.

(3) In K3: The Earth-as-spaceship is at rest. The distance  $l_{K2}$  is reduced to  $l_{K3} = l_{K2}/\beta = l$ ,  $T_{K2\_E}$  is reduced to  $T_{K3\_E} = T_{K2\_E}/\beta = T_{K1}$  at the Earth-as-spaceship at rest, and  $T_{K2\_R}$  is increased to  $T_{K3\_R} = T_{K2\_R}\beta = T_{K1}$  at the rocket-at-rest as spaceship.

These time courses and distances are doubled in the round trip as summarized in **Table II**.

**Table II.** Summary of the time courses and travel distances in the virtual space journey.

Inertial frame system	( Time course, Travel distance )	
	Earth	Rocket
K1, and K3 where the Earth is stationary	$\left( \frac{2l}{v_R}, 0 \right)$	$\left( \frac{2l}{v_R}, 2l \right)$
K2 where the rocket is stationary	$\beta \left( \frac{2l}{v_R}, 2l \right)$	$\frac{1}{\beta} \left( \frac{2l}{v_R}, 0 \right)$
$l$ and $v_R$ respectively denote the one-way distance of the round trip and the velocity of the rocket; and $\beta = 1/\sqrt{1 - v_R^2/c^2}$ , where $c$ denotes the velocity of light.		

ここで距離  $l$  の旅行での時間経過を三つの慣性系 K1, K2, および K3 で再考する.

- (1) K1: ロケットは  $T_{K1} = l/v_R (= 2t_{\text{trp}})$  で惑星 A に到着する.
- (2) K2: ロケットは静止している. 距離  $l$  は  $l_{K2} = l\beta (= 1.15ct_{\text{trp}})$  に増加し, 静止したロケットでは  $T_{K1}$  が  $T_{K2,R} = T_{K1}/\beta (= 1.73t_{\text{trp}})$  に減少し, Earth-as-spaceship では  $T_{K1}$  が  $T_{K2,E} = T_{K1}\beta (= 2.31t_{\text{trp}})$  に増加する. これらは矛盾ではなく, §4.1 および 4.3 で示したように長さと同時間経過の相対性である.
- (3) K3: Earth-as-spaceship は静止している. 距離  $l_{K2}$  は  $l_{K3} = l_{K2}/\beta = l$  に減少し, 静止した Earth-as-spaceship では  $T_{K2,E}$  が  $T_{K3,E} = T_{K2,E}/\beta = T_{K1}$  に減少し, 宇宙船としての rocket-at-rest では  $T_{K2,R}$  が  $T_{K3,R} = T_{K2,R}\beta = T_{K1}$  に増加する.

時間経過と旅行距離を往復で2倍として **Table II** にまとめた.

**Table II.** 仮想的な宇宙旅行での時間経過と旅行距離のまとめ.

慣性系	( 時間経過, 旅行距離 )	
	地球	ロケット
地球が静止している K1, および K3	$\left( \frac{2l}{v_R}, 0 \right)$	$\left( \frac{2l}{v_R}, 2l \right)$
ロケットが静止している K2	$\beta \left( \frac{2l}{v_R}, 2l \right)$	$\frac{1}{\beta} \left( \frac{2l}{v_R}, 0 \right)$
$l$ および $v_R$ はそれぞれ往復旅行の片道の距離とロケットの速度を示す. また, $\beta = 1/\sqrt{1 - v_R^2/c^2}$ , ここで $c$ は光速.		

The twin paradox and the wrong explanations are caused by lack of consideration as follows.

(a) The expansion of the travel distance in K2 is not taken into account, probably because Lorentz contraction is erroneously considered applicable to all transformation.

(b) Only the time course of the Earth-as-spaceship is considered in K2, probably because the time course at the rocket-at-rest and the time course at the Earth-as-spaceship are not properly distinguished.

There are explanations in books and web sites that the time of the Earth-as-spaceship ( or the twin's clock stayed at the Earth ) would go discontinuously at turning points of round trips if we assume the rocket to be stationary, however, the time discontinuity comes from the wrong turning points mistakenly shortened.

双子のパラドックスおよび間違った説明は、以下のように思慮不足が原因である。

(a) K2 で旅行距離が拡張することが考慮されていない。おそらくローレンツ収縮が全ての変換に適用されると誤解されているためであろう。

(b) K2 では Earth-as-spaceship の時間しか考慮されていない。おそらく rocket-at-rest での時間経過と Earth-as-spaceship での時間経過を正しく区別していないためであろう。

ロケットが止まっていると仮定すると Earth-as-spaceship ( 宇宙船地球号 )の時間 (または、地球に残った双子の時計) が、往復旅行の折り返し点で不連続に進む旨の説明が書籍、および web site に見受けられるが、時間が不連続になる原因は、間違って短くした折り返し点に起因する。

## 5. Conclusion and postscript

The time courses in a virtual space journey at an extremely high speed of  $v_R$ , as is relevant to the theory of relativity, was considered. The effects of acceleration and gravity were neglected, because as the travel distance becomes long, these effects become relatively small. A clock in the inertial frame system K2, where the rocket is stationary, loses time at a rate of  $1/\beta = \sqrt{1 - v_R^2/c^2}$ , where  $c$  denotes the velocity of light, compared to the clock in the inertial frame system K1, where the Earth is stationary. While a clock in the Earth-as-spaceship in the inertial frame system K3, where the Earth is stationary, also loses time at a rate of  $1/\beta$ , compared to the clock in the rocket in K2. This is not a paradox, however, because the distance which the Earth-as-spaceship travels is extended at a rate of  $\beta$  in K2 (see **Fig. 1**). The end result is that the time courses of the clock in the Earth-as-spaceship equal the time courses of the clock in the Earth at rest.

**P.S.:** The Earth at rest is like the rocket in K2 in **Fig. 1**. It may thus be worthwhile to think about the movement of the Earth in the universe as Galileo Galilei did.

## 5. 結論と追伸

相対性理論の影響を受けるような高速 $v_R$ での仮想的な宇宙旅行を考察した。加速と重力の影響は旅行距離が長くなると相対的に小さくなるので無視した。ロケットが静止している慣性系 K2 での時計は地球が静止している慣性系 K1 の時計に対し $1/\beta = \sqrt{1 - v_R^2/c^2}$  ( $c$ : 光速)の割合で遅れる。一方、地球が静止している慣性系 K3 での Earth-as-spaceship の時計も K2 のロケットでの時計に対して $1/\beta$ の割合で遅れる。しかし、これはパラドックスではない。なぜなら、K2 での Earth-as-spaceship の旅行距離は $\beta$ の割合で拡大されるからである(**Fig. 1** 参照)。結果として Earth-as-spaceship の時計での経過時間は、静止している地球の時計での経過時間と一致することになる。

**追伸:** 静止している地球は **Fig. 1** の K2 でのロケットのようなものである。ガリレオガリレイのように宇宙の中での地球の動きについて考えることは価値があるかもしれない。

## References

- 1) A. Einstein, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik, **17**, 891 (1905) [in German].
- 2) A. Einstein, Dialog über Einwände gegen die Relativitätstheorie, Die Naturwissenschaften, **6**, 697 (1918) [in German].