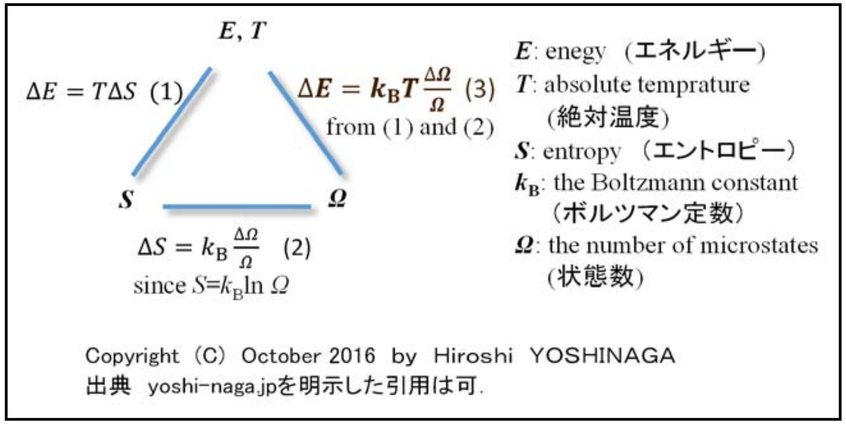
「やっとわかった！」エネルギーと情報量の関係(2016.10).　発表はこのサイトのみ.

$$\Delta E = k_B\, T\, \Delta\Omega\, /\, \Omega$$

エンロトピーの定義式に基づいて，エネルギー変化 ΔE と状態数の変化率 $\Delta\Omega/\Omega$ には $\Delta E= k_{\mathrm{B}} T\Delta\Omega/\Omega$ の関係があると解釈．ここで，k_{B}:ボルツマン定数，T:温度．エネルギーとエントロピーと情報量の関係は，解説本を読んでもわからなかった．自己流の解釈で「やっとわかった！」．



温度 T とは「エネルギー変化 ΔE 」と「状態数の変化率 $\Delta\Omega/\Omega$ 　の比と解した.

「気体」、「光」、および「運動する粒子」への適用.

$\Delta E = k_B T \frac{\Delta\Omega}{\Omega}$を「気体」，「光」,および「粒子の運動」の計算式へ適用したら単純明快な結果が得られました．素人による自己流の論理のため，誤っているかもしれません．

気体, 光, および運動する粒子で共通

$$\Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{k}_{\mathrm{B}} \boldsymbol{T} \frac{\Delta\boldsymbol{\Omega}}{\boldsymbol{\Omega}} \quad (3)$$

$$\Omega = a_1 p^{n_{\mathrm{f}} \cdot n_{\mathrm{p}}} \quad (4)$$

式(4)では以下を仮定した.

・(3)式の$\frac{\Delta\Omega}{\Omega}$ は比なので個々の粒子を区別する前提で状態数Ωを計算しても良い.

・粒子１個の状態数は運動量pの自由度n_{f}乗に比例.
（n_{f}の例：Heではx, y, zの3, N_2では伸縮と回転が 加わり5)

・粒子数n_{p}の状態数Ωは$p^{n_{\mathrm{f}}}$のn_{p}乗に比例.

$$(4) \rightarrow \frac{\Delta\Omega}{\Omega} = n_{\mathrm{f}} n_{\mathrm{p}} \frac{\Delta p}{p} \quad (5)$$

$$(3),(5) \rightarrow \Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{n}_{\mathrm{f}} \boldsymbol{n}_{\mathrm{p}} \boldsymbol{k}_{\mathrm{B}} \boldsymbol{T} \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}} \quad (6)$$

ここで

E: 粒子n_{p}個のエネルギー（J）
k_{B}:ボルツマン定数　1.381×10^{-23} JK^{-1}
T: 絶対温度(K)
Ω: 粒子n_{p}個の状態数
a_1: 比例定数

気体への適用

$$p = a_2 \left(\frac{E}{n_\mathrm{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

式(6)では,粒子1個の運動量がエネルギーの1/2乗に比例すると仮定した.

$$(7) \rightarrow \frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{2}\frac{\Delta E}{E} \quad (8)$$

一方,式(9)が公知

$$E = \frac{n_\mathrm{f}}{2}\frac{n_\mathrm{p}}{N_\mathrm{a}} RT \quad (9)$$

$$(6),(8),(9) \rightarrow \boldsymbol{R = k_\mathrm{B} N_\mathrm{a}} \quad (10)$$

式(10)は公知であるが,ごく簡単に導出できた.

ここで

a_2: 比例定数

R : 気体定数　8.314 JK^{-1}mol^{-1}

N_a : アボガドロ数 6.022×10^{23} mol^{-1}

光への適用

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad (11)$$

$$E = n_\mathrm{P} h\nu \quad (12)$$

$$(11) \rightarrow \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta \nu}{\nu} \quad (13)$$

$$(12) \rightarrow \Delta E = n_\mathrm{P} h \Delta\nu \quad (14)$$

光の自由度n_fはx, y, z方向の3と仮定し

$$(6),(13),(14) \rightarrow \boldsymbol{h\nu = 3k_\mathrm{B}T} \quad (15)$$

ここで

h :プランク定数　6.626×10^{-34} Js

ν :振動数 s^{-1}

c:光速 ms^{-1}

式(15)は黒体放射のピーク$\boldsymbol{h\nu}$=2.82$\boldsymbol{k_\mathrm{B}T}$や
太陽光のピーク$\boldsymbol{h\nu \cong 5k_\mathrm{B}\ T}$に近い.

運動する粒子への適用

$p = mv$ (16)

$E = n_\mathrm{P} \cdot \frac{1}{2} m v^2$ (17)

(16)→$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta v}{v}$ (18)

(17)→$\Delta E = n_\mathrm{P} m v \Delta v$ (19)

(6),(18),(19)→$\boldsymbol{mv^2 = n_\mathrm{f} k_\mathrm{B} T}$ (20)

ここで

m :粒子1個の質量 kg

v :粒子の速度 m s^{-1}

式(20)より,「運動する粒子の温度」は粒子1個のエネルギーに比例し,自由度に反比例, 粒子の数によらない！

(17),(20)→$E = \frac{1}{2} n_\mathrm{f} n_\mathrm{P} k_\mathrm{B} T$ (21)

$n_\mathrm{f} = 3$とすれば式(9),(10)で自由度3とした気体と同じ.

戻る.